ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Ιωάννης Βανδουλάκης • Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης • Σπύρος Φερεντίνος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ

Τόμος 2ος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 2ος

<u>ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ</u>

Ιωάννης Βανδουλάκης, *Μαθηματικός*
Χαράλαμπος Καλλιγάς, *Μαθημ/κός-Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης*
Νικηφόρος Μαρκάκης, *Μαθημ/κός-Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης*
Σπύρος Φερεντίνος, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*

<u>ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ</u>

Χαράλαμπος Τσίτουρας, *Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ-Χαλκίδας*
Γεώργιος Μπαραλός, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθ/κών*
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου, *Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*

<u>ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ</u>

Κλειώ Γκιζελή, *Ζωγράφος*
Ιόλη Κυρούση, *Γραφίστρια*

<u>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>

Βαρβάρα Δερνελή, *Φιλόλογος Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ</u>

Αθανάσιος Σκούρας, *Σύμβουλος Παιδαγωγ. Ινστιτούτου*

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>

Μανώλης Χάρος, *Ζωγράφος*

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και η Θεοδώρα Αστέρη, *Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 2ος

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

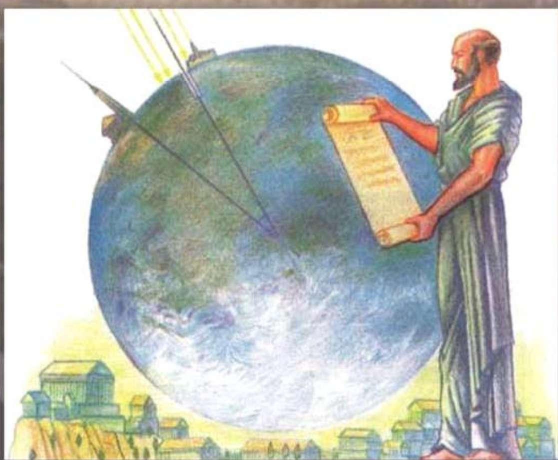
<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΜΕΡΟΣ Α΄

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ Ο ΚΥΡΗΝΑΙΟΣ
(276 – 194 π.χ.)

3.1 Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί - Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Στρογγυλοποίηση

- *Μετατρέπω ένα δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και αντιστρόφως, ένα δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα*
- *Κατανοώ τους δεκαδικούς αριθμούς ως αποτέλεσμα μετρήσεων*
- *Αναγνωρίζω την αξία των ψηφίων ενός δεκαδικού αριθμού*
- *Αντιστοιχίζω τους δεκαδικούς αριθμούς με σημεία της ευθείας των αριθμών*
- *Συγκρίνω δεκαδικούς αριθμούς*
- *Στρογγυλοποιώ δεκαδικούς αριθμούς*
- *Κατανοώ την έννοια του δεκαδικού κλάσματος ως δεκαδικού πηλίκου και γράφω ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό και ως ποσοστό*

3.2 Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

- *Εκτελώ πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων*
- *Υπολογίζω δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό*
- *Εκτελώ τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα*

3.3 Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

- *Εκτελώ πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης*

3.4 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

- *Γράφω πολύ “μεγάλους” αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή*

3.5 Μονάδες μέτρησης

- *Γνωρίζω τις βασικές μονάδες μέτρησης μεγεθών και τη μετατροπή τους από τη μία στην άλλη*

Α.3.1. Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί Διάταξη δεκαδικών αριθμών Στρογγυλοποίηση

Αν χωρίσουμε μια μονάδα σε 10 ίσα μέρη, τότε μπορούμε να πάρουμε κλάσματα της μονάδας όπως:

$\frac{1}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{10}$ κλπ. Τα κλάσματα αυτά είναι ομώνυμα, συγκρίνονται εύκολα και εξυπηρετούν στις πράξεις και στις μετρήσεις. Ας τα προσεγγίσουμε με μερικές δραστηριότητες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Αν βάλουμε στη ζυγαριά 2 σταθμά, θεωρώντας το ένα από αυτά ως μονάδα μέτρησης, διαπιστώνουμε ότι η μπάλα είναι βαρύτερη και αν βάλουμε 3 από τα ίδια, ότι είναι ελαφρότερη.

- ***Τι είδους σταθμά χρειαζόμαστε, εκτός από αυτά που διαθέτουμε, για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρησή μας;***
- ***Τι μορφή θα έχει ο αριθμός, που εκφράζει το αποτέλεσμα της μέτρησης του βάρους της μπάλας;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Προσπάθησε να μετρήσεις το μήκος του θρανίου σου με μονάδα μέτρησης: (α) το μολύβι σου, (β) ένα σχοινί μήκους ενός μέτρου και (γ) με ένα μέτρο.

- ***Στην προσπάθειά σου, στις τρεις διαφορετικές μετρήσεις, για να δώσεις ένα αποτέλεσμα όσο γίνεται πιο ακριβές, τι είδους προβλήματα αντιμετωπίζεις;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Αν σου ζητηθεί να χωρίσεις το τμήμα ΑΒ που έχει μήκος 5 εκατοστά σε οκτώ ίσα μέρη, πόσο θα είναι το μήκος του κάθε μέρους από αυτά;

Α ——————— **Β**

5 εκατοστά

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες, γίνεται φανερό, ότι σε πολλές περιπτώσεις μετρήσεων οι φυσικοί αριθμοί δεν επαρκούν να εκφράσουν τα αποτελέσματα αυτών των μετρήσεων με ακρίβεια. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τους δεκαδικούς αριθμούς.

- **Δεκαδικό κλάσμα** λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή **μια δύναμη του 10.**

Τα κλάσματα $\frac{3}{10}$, $\frac{825}{10}$, $\frac{53}{1000}$ και $\frac{1004}{10000}$ έχουν παρονομαστές τους φυσικούς αριθμούς 10,100,1000 και 10000, που είναι δυνάμεις του 10: 10^1, 10^2, 10^3 και 10^4.

Ο Φλαμανδός μαθηματικός Σιμόν Στέβιν (Simon Stevin, 1548 - 1620) ασχολήθηκε με τα δεκαδικά κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Το έργο “η δεκάτη” (La disme) ήταν μια από τις μεγάλες συνεισφορές στην , βελτίωση της τεχνικής των υπολογισμών και στην καθιέρωση του Ινδοαραβικού συστήματος αρίθμησης. Την ίδια χρονιά δημοσιεύει την “Αριθμητική” του, όπου εισάγει το σύμβολο ⓪, για να υποδηλώσει το ακέραιο μέρος του αριθμού, το σύμβολο ①, για τα δέκατα, το ②, για τα εκατοστά, κλπ. Με αυτόν τον τρόπο συμβολισμού ο δεκαδικός 34,25 γραφόταν 34⓪2①5②, ο αριθμός 0,167 γραφόταν 0⓪1①6② 7③ και ο αριθμός 32 γραφόταν 32⓪. Ο γνωστός σήμερα συμβολισμός προτάθηκε από τον John Napler στα 1620 περίπου. Αυτός πρώτος χρησιμοποίησε το κόμμα μεταξύ του ακέραιου και του δεκαδικού μέρους ενός αριθμού. Το νέο σύστημα συμβολισμού επικράτησε, λόγω της συντομίας στην αναπαράσταση μεγάλων αριθμών και την ευκολία στην απομνημόνευση και εκτέλεση διαφόρων πράξεων.

Γραφή, ανάγνωση και στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Στον πίνακα της επόμενης σελίδας υπάρχουν διάφοροι δεκαδικοί αριθμοί.

- ***Προσπάθησε να τους διαβάσεις και να τους γράψεις ολογράφως.***
- ***Ποιος από αυτούς είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος;***

➢ ***Προσπάθησε να τους τοποθετήσεις σε αύξουσα σειρά.***

➢ ***Στρογγυλοποίησε τους αριθμούς (α) στη μονάδα και (β) στο εκατοστό.***

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά	Δεκ. χιλιοστά	Εκατοντ. Χιλιοστα	Εκατομμυριοστά
1	5	1	3	,	0	0	3			
		2	7	,	1	8	0	6		
			0	,	4	0	5	9	0	8
	9	5	0	,	4	2	0			
8	5	0	0	,	7					
1	5	4	5	,	8	6	4	5	2	
9	5	2	8	,	9					
9	8	0	1	,	5	1	3	3		
4	6	3	7	,	2	5	2			
1	5	1	3	,	0	0	4			
1	5	1	3	,	1					

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5η

Στον δεκαδικό αριθμό □0,□9 λείπουν δύο ψηφία του.

➢ ***Συμπλήρωσε τα κενά έτσι, ώστε κανένα ψηφίο του αριθμού να μην είναι ίδιο με άλλο.***

➢ ***Βρες ποιος είναι ο μεγαλύτερος ή ο μικρότερος δεκαδικός που μπορείς να γράψεις;***

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

◆ Στο δεκαδικό μέρος οι τάξεις είναι τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά, τα δεκάκις χιλιοστά, τα εκατοντάκις χιλιοστά, τα εκατομμυριοστά κ.λπ.

◆ Στο ακέραιο μέρος οι τάξεις είναι σε μονάδες, δεκάδες κ.λπ.

◆ Δέκα μονάδες μίας τάξης είναι μια μονάδα μεγαλύτερης τάξης.

◆ Σε κάθε δεκαδικό αριθμό διακρίνουμε το **ακέραιο μέρος** και το **δεκαδικό μέρος** του. Αυτά διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.

◆ Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει το μεγαλύτερο ψηφίο στην αρχική τάξη.

8,97453 < 9,432

◆ Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το αμέσως επόμενο ψηφίο μεγαλύτερο.

105,3842 > 105,37896

◆ Για να **στρογγυλοποιήσουμε** ένα δεκαδικό αριθμό:
– Προσδιορίζουμε τη δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
– Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
– Αν αυτό είναι **μικρότερο του 5**, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.
– Αν είναι **μεγαλύτερο ή ίσο του 5**, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης **αυξάνεται κατά 1**.

957,3842 → 957,384
957,3842 → 957,38
957,3842 → 957,4
957,3842 → 957
957,3842 → 960
957,3842 → 1.000

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Να γραφούν τα κλάσματα που ακολουθούν, ως δεκαδικοί αριθμοί με την εκτέλεση των αντίστοιχων διαιρέσεων: (α) $\frac{20}{4}$, (β) $\frac{50}{8}$, (γ) $\frac{520}{67}$***

Λύση

(α) $\frac{20}{4} = 20 : 4 = 5$

(β) $\frac{50}{8} = 50 : 8 = 6,25$

50,00	8
20	6,25
40	
0	

(γ) $\frac{520}{67} = 520 : 67 = 7,76119…$

520,000000	67
510	7,76119
7,76119	
410	
80	
130	
630	

Στην περίπτωση αυτή το πηλίκο δεν είναι ακριβές και συνήθως γράφεται με προσέγγιση δέκατου 7,8 ή εκατοστού 7,77 ή χιλιοστού 7,761 κλπ.

2. ***Να γραφούν, ως κλάσματα, οι δεκαδικοί αριθμοί: (α) 2,35 και (β) 0,348.***

Λύση

(α) $2{,}35 = 235 : 100 = \frac{235}{100}$

(β) $0{,}348 = 348 : 1000 = \frac{348}{1000}$

3. ***Να γραφούν, ως δεκαδικοί αριθμοί, τα κλάσματα:***

(α) $\frac{314}{100}$ ***και (β)*** $\frac{769}{1000}$

Λύση

(α) $\frac{314}{100} = 314 : 100 = 3{,}14$ (β) $\frac{769}{100} = 769 : 1000 = 0{,}769$

4. ***Να μετατραπεί το κλάσμα*** $\frac{10}{8}$ ***σε δεκαδικό κλάσμα.***

Λύση

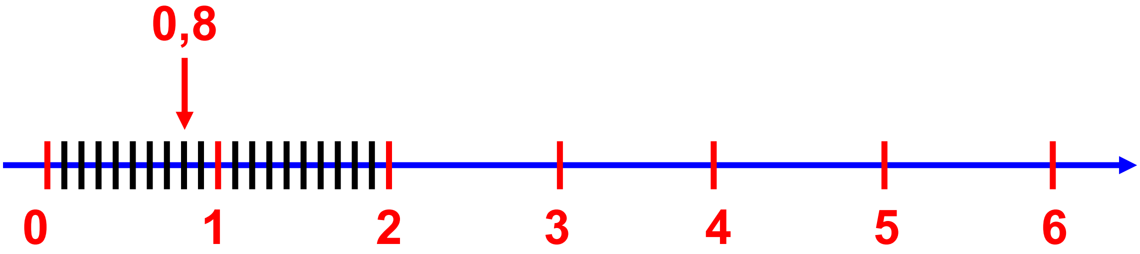
Αρχικά, μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{10}{8}$ **σε δεκαδικό αριθμό, εκτελώντας τη διαίρεση και έχουμε:**

$\frac{10}{8} = 10 : 8 = 1{,}25$. **Ο δεκαδικός** $1{,}25$ **μετατρέπεται σε δεκαδικό κλάσμα** $1{,}25 = 125 : 100 = \frac{125}{100}$ **. Άρα** $\frac{10}{8} = \frac{125}{100}$

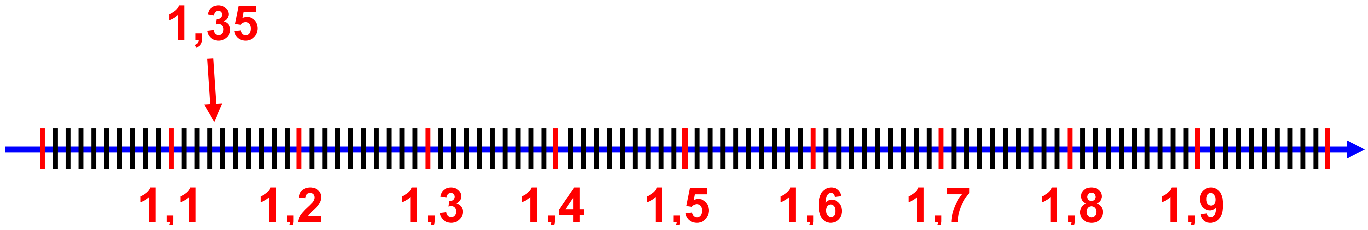
5. ***Να τοποθετηθούν στην ευθεία των αριθμών οι δεκαδικοί αριθμοί: (α) 0,8 και (β) 1,35.***

Λύση

(α) Ισχύει, ότι: $0 < 0{,}8 < 1$. **Δηλαδή, το τμήμα της ευθείας μεταξύ των φυσικών αριθμών 0 και 1 πρέπει να χωριστεί σε 10 ίσα μέρη (δέκατα).**



(β) Επίσης, ισχύει: *1* < *1,35* < *2*. Δηλαδή, το τμήμα της ευθείας μεταξύ των φυσικών αριθμών *1* και *2* πρέπει να χωριστεί σε *100* ίσα μέρη (εκατοστά).



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Γράψε ως κλάσματα τα πηλίκα των διαιρέσεων:*
(α) 4 : 5, (β) 9 : 16, (γ) 25 : 79.

***2.** Ποια διαίρεση παριστάνει καθένα από τα κλάσματα:*

(α) $\frac{2}{21}$, *(β)* $\frac{19}{3}$, *(γ)* $\frac{77}{105}$.

***3.** Γράψε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα, ως δεκαδικό αριθμό:*
(i) με προσέγγιση εκατοστού και
(ii) με προσέγγιση χιλιοστού:

(α) $\frac{7}{16}$, *(β)* $\frac{21}{17}$, *(γ)* $\frac{20}{95}$.

4. Γράψε ως δεκαδικό αριθμό, καθένα από τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα:

(α) $\frac{58}{10}$, (β) $\frac{3}{100}$, (γ) $\frac{5025}{100}$, (δ) $\frac{1024}{1000}$

5. Γράψε ως δεκαδικό κλάσμα, καθέναν από τους δεκαδικούς αριθμούς που ακολουθούν:
(α) 3,5, (β) 45,25, (γ) 3,004.

6. Να βρεις το ψηφίο των χιλιοστών και των δεκάκις χιλιοστών στους παρακάτω αριθμούς: (α) 5,8909, (β) 98,0005, (γ) 456,8756.

7. Τοποθέτησε το κατάλληλο σύμβολο <, = ή >, μεταξύ των αριθμών:

(α) 45,345 … 45,413,

(β) 980,19 … 899,01,

(γ) 7,534 … 7,5340.

8. Να στρογγυλοποιήσεις τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο δέκατο, εκατοστό και χιλιοστό:
(α) 9876,008, (β) 67,8956, (γ) 0,001, (δ) 8,239, (ε) 23,7048.

9. Τοποθέτησε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στην ευθεία των αριθμών: (α) 3,4, (β) 4,5, (γ) 2,3, (δ) 2,8, (ε) 4,7, (στ) 4,3, (ζ) 2,5, (η) 1,9, (θ) 5,1.

10. Στον αριθμό 34,$\square\square\square$, λείπουν τα τρία δεκαδικά ψηφία του. Να συμπληρώσεις τον αριθμό με τα ψηφία 9, 5 και 2, έτσι ώστε κάθε ψηφίο να γράφεται μία μόνο

φορά. Να γράψεις όλους τους δεκαδικούς που μπορείς να βρεις και να τους διατάξεις σε φθίνουσα σειρά.

11. Να συμπληρώσεις το ψηφίο που λείπει στον αριθμό 25,☐7, αν γνωρίζεις ότι, όταν ο αριθμός στρογγυλοποιείται στο πλησιέστερο δέκατο, γίνεται ίσος με 25,5.

12. Αντιστοίχισε κάθε δεκαδικό αριθμό από τον πρώτο πίνακα με το δεκαδικό κλάσμα, του οποίου είναι το πηλίκο, στο δεύτερο πίνακα.

0,345
3,45
0,0345
34,5

$\frac{345}{10}$
$\frac{345}{1000}$
$\frac{345}{100}$
$\frac{345}{10000}$

13. Στην επόμενη σελίδα αντιστοίχισε κάθε κλάσμα της πρώτης στήλης με το ισοδύναμο του της δεύτερης στήλης και αυτό με τον αντίστοιχο δεκαδικό της τρίτης στήλης.

$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0,9
$\frac{6}{20}$	$\frac{190}{10}$	0,4
$\frac{45}{50}$	$\frac{25}{10}$	0,3
$\frac{15}{5}$	$\frac{4}{10}$	3,0
$\frac{10}{4}$	$\frac{9}{10}$	2,5
$\frac{19}{1}$	$\frac{30}{10}$	19,0

Α.3.2. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς - Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

Στους δεκαδικούς οι πράξεις δεν παρουσιάζουν καμιά ιδιαίτερη δυσκολία. Αρκεί να προσέχουμε τη θέση της υποδιαστολής. Ας τις δούμε, όμως, πιο αναλυτικά.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

◆ Η **Πρόσθεση** και η **Αφαίρεση** δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και στους φυσικούς αριθμούς.

Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας τάξης, τοποθετώντας τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο έτσι, ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη.

86,907	32
+ 132,76	+ 14,085
219,667	46,085
54,452	18,32
- 15,905	- 7,952
38,547	10,358

◆ Ο **Πολλαπλασιασμός** δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και των φυσικών αριθμών.
Τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.

15,82	*2 δεκαδικά ψηφία*
x 2,3	*1 δεκαδικό ψηφίο*
4746	
+ 3164	
36,386	*3 δεκαδικά ψηφία*

◆ Η **Διαίρεση δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό** γίνεται, όπως και η ευκλείδεια διαίρεση.

Πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτη και το διαιρετέο με την κατάλληλη δύναμη του 10 έτσι, ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός.
Όταν εξαντληθεί το ακέραιο μέρος του διαιρετέου, "κατεβάζουμε" το **μηδέν**, ως πρώτο δεκαδικό ψηφίο από τον διαιρετέο και τοποθετούμε στο πηλίκο υποδιαστολή.

Η διαίρεση 534,28 : 3,178 γίνεται 534280 : 3178

(πολλαπλασιάσαμε διαιρετέο και διαιρέτη με το 1000 για να απαλείψουμε τα δεκαδικά ψηφία από το διαιρέτη)

534280,0	3178
21648	168,1
25800	
3760	
582	

● Όταν πολλαπλασιάζουμε με **0,1, 0,01, 0,001**… ή όταν διαιρούμε ένα δεκαδικό αριθμό με **10, 100, 1000**, … μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα **αριστερά μια, δυο, τρεις**, … αντίστοιχα θέσεις.

$258 \cdot 0{,}1 = 258 : 10 = 25{,}8$
$8{,}45 \cdot 0{,}01 = 8{,}45 : 100 = 0{,}0845$
$12{,}45 \cdot 0{,}001 = 12{,}45 : 1000 = 0{,}01245$

• Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα δεκαδικό αριθμό με **10, 100, 1000**… μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα **δεξιά μία, δύο, τρεις**, … θέσεις αντίστοιχα.

$28{,}34 \cdot 10 = 283{,}4$
$38{,}0945 \cdot 100 = 3809{,}45$
$1{,}3245 \cdot 1000 = 1324{,}5$
$0{,}009 \cdot 1000 = 9$

◆ Οι **Δυνάμεις** των δεκαδικών αριθμών έχουν τις ιδιότητες των δυνάμεων των φυσικών αριθμών.

Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, που έχει το αποτέλεσμα, προκύπτει από το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της βάσης επί τον εκθέτη της δύναμης.

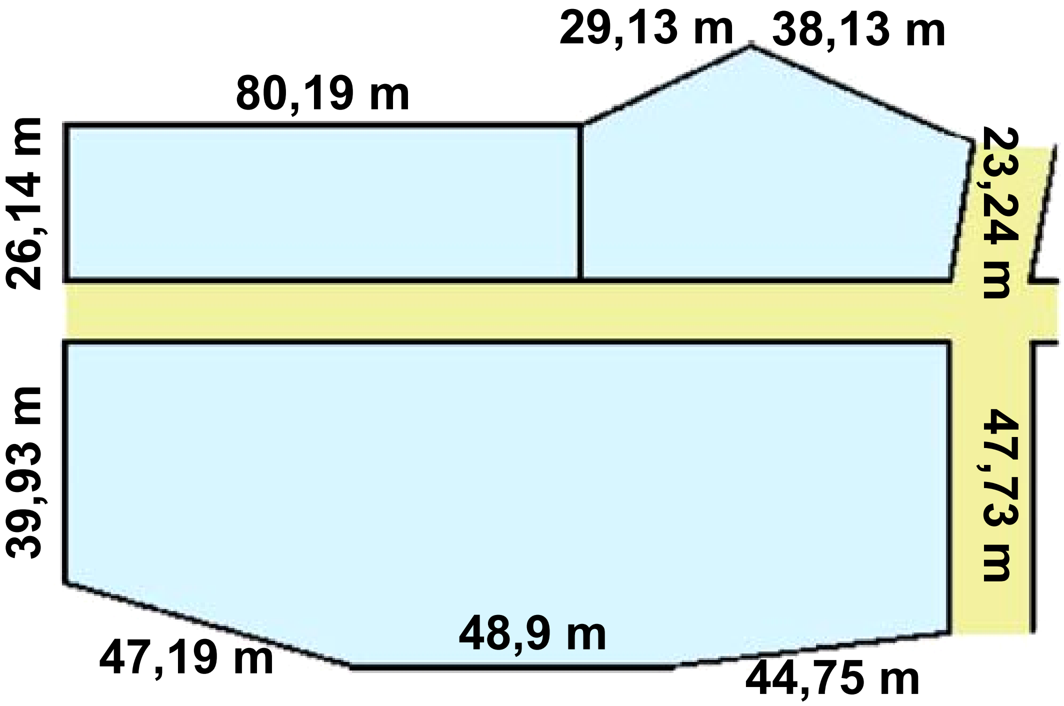
$(2{,}5)^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$	1 x 2 = 2
$(1{,}25)^2 = 1{,}25^2 = 1{,}5625$	2 x 2 = 4
$(0{,}115)^2 = 0{,}115^2 = 0{,}013225$	3 x 2 = 6
$(1{,}5)^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$	1 x 3 = 3
$(0{,}15)^3 = 0{,}15^3 = 0{,}003375$	2 x 3 = 3
$(0{,}5)^4 = 0{,}5^4 = 0{,}0625$	1 x 4 = 4
$(0{,}15)^4 = 0{,}15^4 = 0{,}00050625$	2 x 4 = 8

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Να υπολογίσεις τα αθροίσματα:***

(α) 48,18 + 3,256 + 7,129   (β) 3,59 + 7,13 + 8,195.

2. ***Να υπολογίσεις το μήκος της περιμέτρου καθενός από τα οικόπεδα του παρακάτω σχήματος.***



3. ***Να υπολογίσεις τις διαφορές:***
(α) 15,833 - 4,791
(β) 13,902 - 12,5025
(γ) 20,0005 - 12,501.

4. ***Να κάνεις τις παρακάτω διαιρέσεις: (α) 579 : 48***
(β) 314 : 25   (γ) 520 : 5,14   (δ) 49,35 : 7

5. ***Να κάνεις τις πράξεις:***
(α) 520 • 0,1 + 0,32 •100   (β) 4,91 • 0,01 + 0,819 • 10.

6. ***Να κάνεις τις πράξεις:***
(α) 4,7 : 0,1 – 45 : 10 (β) 0,98 : 0,0001 – 6785 : 1000

7. ***Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 20,2. Να υπολογίσεις την πλευρά του.***

8. ***Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 48,52. Αν η βάση του είναι 10,7, πόσο είναι η κάθε μία από τις ίσες πλευρές του;***

9. ***Να υπολογίσεις τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:***
(α) 24 • 5 – 2 + 3 • 5 (β) 3 •11 – 2 + 54,1 : 2.

10. ***Να υπολογίσεις τις δυνάμεις:***
(α) $3{,}1^2$ (β) $7{,}01^2$ (γ) $4{,}5^2$
(δ) $0{,}5^2$ (ε) $0{,}2^2$ (στ) $0{,}3^3$.

11. ***Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος***

☐ ***(α) 2,75 + 0,05 + 1,40 + 16,80 = 21***

☐ ***(β) 420,510 + 72,490 + 45,19 + 11,81 = 500***

☐ ***(γ) 4 – 3,852 = 1,148***

☐ ***(δ) 32,01 – 4,001 = 28,01***

☐ ***(ε) 41900 · 0,0001 – 0,0419 · 1000 = 0***

☐ ***(στ) 56,89 · 0,01 + 4311 : 10000 = 1***

☐ ***(ζ) (3,2 + 7,2 · 2 +24 · 0,1) : 100 = 0,2***

Α.3.3. Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

Ο υπολογιστής τσέπης είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη γρήγορη εκτέλεση πράξεων. Τα κουμπιουτεράκια που υπάρχουν στο εμπόριο και χρησιμοποιούνται σήμερα είναι πολλών ειδών. Όλα όμως μπορούν να εκτελούν τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής. Οι βασικές πράξεις μεταξύ δύο αριθμών εκτελούνται με την απλή εισαγωγή σε σειρά των αριθμών και του σύμβολου της πράξης μεταξύ του. Στην περίπτωση που το αποτέλεσμα έχει πολλά ψηφία, η μορφή του παρουσιάζεται με προσέγγιση.

Τα σύμβολα για τις τέσσερις πράξεις είναι τα εξής:

+ , − , * και / .

Το πάτημα του πλήκτρου = μας δίνει στην οθόνη του υπολογιστή το αποτέλεσμα της πράξης.

128,35	+	59,003	=	187,353
752	−	38,498	=	713,502
1520,39	*	3,759	=	5715,14601
859	/	10,19	=	84,29833

Αν ο υπολογιστής τσέπης διαθέτει βοηθητική μνήμη τότε υπάρχουν σ’ αυτόν τα πλήκτρα:

MR εμφανίζει στην οθόνη τον αριθμό που είναι τοποθετημένος στη μνήμη,

MC σβήνει το περιεχόμενο της μνήμης και

M+ προσθέτει στον αριθμό που υπάρχει στη μνήμη το περιεχόμενο της οθόνης

M– αφαιρεί από τον αριθμό που υπάρχει στη μνήμη το περιεχόμενο της οθόνης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί η τιμή της αριθμητικής παράστασης: (1,5 : 3 + 0,4 • 7) • 5 – 31,2 : (0,9 • 2 + + 3,3 : 1,1) με τη χρήση υπολογιστή τσέπης.

Λύση

Προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

1,5 **/** 3 **=** 0,5 **M+** 0,4 ***** 7 **=** 2,8

M+ **MR** 3,3

0,9 ***** 2 **=** 1,8 **M+** 3,3 **/** 1,1 **=** 3

M+ **MR** 4,8

3,3 * 5 = 16,5 M+ 31,2 / 4,8 = 6,5

M= MR 10

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ποια αριθμητική παράσταση υπολογίζεται, με τις παρακάτω πράξεις που έχουν γίνει στο κομπιου-τεράκι και ποιο είναι το τελικό αποτέλεσμα;

7,28 / 5,2 – 0,4 = ? * 5,8 + 4,2 =

= ? M+

2,4 + 7,1 = ? / 5 = ? + 0,1 =

= ? M+

2,03 + 0,47 = ? * 3,2 = ?

M+ MR ? MC ?

Α.3.4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

➢ ***Πώς μπορούν να γραφούν οι παρακάτω αριθμοί έτσι, ώστε να διαβάζονται με συνοπτικό και κατανοητό τρόπο;***

- ***Η μάζα του Ήλιου είναι:*** **19830000000000000000000000000000** ***κιλά.***
- ***Η μάζα της Γης είναι:*** **5976000000000000000000000** ***κιλά.***

Από την παραπάνω δραστηριότητα βλέπουμε ότι υπάρχει αρκετή δυσκολία στη γραφή πολύ μεγάλων αριθμών. Η δυσκολία αυτή μπορεί να ξεπεραστεί αν χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο τρόπο γραφής που λέγεται «τυποποιημένη μορφή».

Μαθαίνουμε

● Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $\mathbf{\alpha \cdot 10^{\nu}}$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού **α** επί μια δύναμη του **10**. Τη μορφή αυτή την ονομάζουμε **τυποποιημένη**. Ο αριθμός **α** είναι ένας **δεκαδικός** αριθμός με ακέραιο ψηφίο **μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

3.140.000.000.000.000.000 =

3,14 ·1.000.000.000.000.000.000 = 3,14 ·10^{18}

234.000.000.000.000.000 =

2,34 · 100.000.000.000.000.000 = 2,34 · 1Ο^{17}

Επίσης ο αριθμός $5,21 \cdot 10^5$ είναι η τυποποιημένη μορφή του αριθμού *521.000* και ο αριθμός $2 \cdot 10^3$ είναι η τυποποιημένη μορφή του αριθμού *2.000*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Να γράψεις τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή:***

(α) 583.000
(β) 4.300.000
(γ) 7.960.000
(δ) 3.420.000.000
(ε) 4.800
(στ) 7.310
(ζ) 281.900
(η) 518.000.000
(θ) 131.000
(ι) 675.000.

2. ***Να γράψεις τη δεκαδική μορφή των αριθμών:***

(α) $3,1 \cdot 10^6$ (β) $4,820 \cdot 10^5$ (γ) $3,25 \cdot 10^4$
(δ) $7,4 \cdot 10^3$ (ε) $9,2 \cdot 10^2$.

3. ***Να κάνεις τις ακόλουθες πράξεις:***

(α) $1.000.000.000 \cdot 1.000.000.000$
(β) $987654321 \cdot 123456789$ (γ) $1.000.000^3$.

Αναζήτησε κατάλληλες πηγές για να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

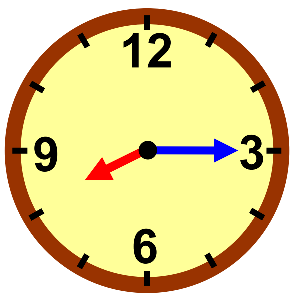
– **Πόσα χιλιόμετρα είναι ένα έτος φωτός;**
– **Πόσα ερυθρά αιμοσφαίρια υπάρχουν σ’ έναν υγιή άνθρωπο;**
– **Πόσα χιλιόμετρα απέχει από τη Γη η Σελήνη;**
– **Πόση είναι η ακτίνα της Γης;**

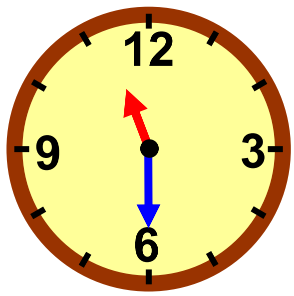
Α.3.5. Μονάδες μέτρησης

Η φιλοδοξία δεν είναι εύκολο να μετρηθεί. Ούτε ο φόβος. Υπάρχουν όμως πράγματα που μπορούν να μετρηθούν, όπως π.χ. το μήκος, το βάρος, ο χρόνος. Για να τα μετρήσουμε χρειαζόμαστε για το καθένα μια μονάδα μέτρησης. Αλλά και αυτό δεν φτάνει, διότι δεν είναι όλα τα μεγέθη ακέραια πολλαπλάσια της μονάδας. Θα πρέπει, λοιπόν, να δημιουργήσουμε και υποδιαιρέσεις της μονάδας. Έτσι θα είμαστε πιο ακριβείς στις μετρήσεις μας. Ας προχωρήσουμε τώρα με μια δραστηριότητα που μετράει τις δραστηριότητες του Γιάννη που δεν πέρασε καθόλου άσχημα το πρωί της Κυριακής.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

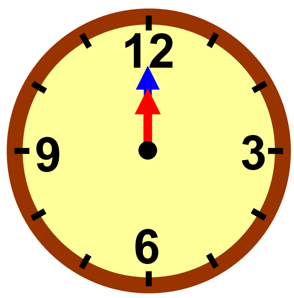
Ο Γιάννης ξύπνησε την Κυριακή το πρωί, στις οκτώ και τέταρτο και ως τις έντεκα και μισή έπαιζε. Από τις έντεκα και μισή, ως τις δώδεκα, είδε τηλεόραση.





➢ ***Πόσο χρόνο πέρασε σε κάθε δραστηριότητά του;***

α) Με μονάδα μέτρησης την ώρα;
β) Με μονάδα μέτρησης το τέταρτο;
γ) Με μονάδα μέτρησης το πεντάλεπτο;
δ) Με μονάδα μέτρησης το λεπτό;
ε) Με μονάδα μέτρησης το δευτερόλεπτο;



➢ ***Τι παρατηρείς; Πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι μετρήσεις του κάθε χρονικού διαστήματος με διαφορετικές μονάδες μέτρησης του χρόνου;***

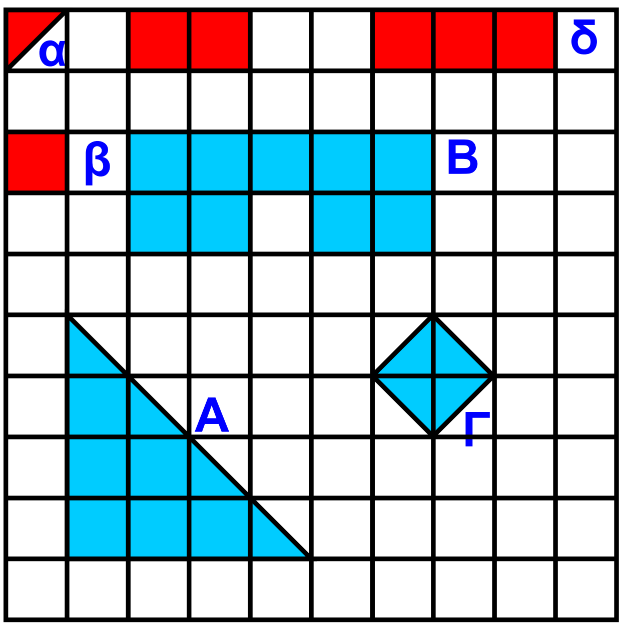
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Η μάζα του κυπέλλου του σχήματος να μετρηθεί με μονάδα μέτρησης τα 50 g, τα 100 g, τα 500 g και το 1 Kg.

- ***Τι παρατηρείς:***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

1. Προσπάθησε να μετρήσεις στην επόμενη σελίδα τα Α, Β και Γ, με βάση τις τέσσερις διαφορετικές μονάδες μέτρησης α, β, γ και δ.



Από τη μέτρηση θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Α = 16 α, Α = 8 β, Α = 4 γ, Α = $\frac{8}{3}$ δ,

$B = 18\ α$, $B = 9\ β$, $B = 4{,}5\ γ$, $B = 3\ δ$,

$Γ = 4\ α$, $Γ = 2\ β$, $Γ = 1\ γ$, $Γ = \frac{2}{3}\ δ$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός που εκφράζει το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

2. Βρες τον όγκο του παρακάτω σχήματος με μονάδα μέτρησης τους όγκους α, β και γ.

Ο όγκος του σχήματος θα είναι αντίστοιχα: ***56α, 28β, 8γ.***

Παρατηρούμε, ότι ο αριθμός που εκφράζει τον όγκο ενός στερεού εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Μονάδες μέτρησης μήκους

- **Η βασική μονάδα μήκους είναι το μέτρο (συμβολίζεται με m)**

Υποδιαιρέσεις του μέτρου:

– 1 δεκατόμετρο ή παλάμη (dm) $1dm = \frac{1}{10} m = 0{,}1m$

– 1 εκατοστόμετρο ή πόντος (cm) $1cm = \frac{1}{100} m = 0{,}01m$

– 1 χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό (mm)

$$1mm = \frac{1}{1.000} m = 0,001\ m$$

Πολλαπλάσια του μέτρου

– 1 χιλιόμετρο (Km) **1 Km = 1000 m**

• **Στη ναυσιπλοία, ως μονάδα μέτρησης μήκους, χρησιμοποιούμε το ναυτικό μίλι.**

1 ναυτικό μίλι = 1.852 m

Μονάδες μέτρησης εμβαδού

• **Η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το τετραγωνικό μέτρο (συμβολίζεται με m^2) που είναι η επιφάνεια ενός τετραγώνου με πλευρά ένα μέτρο.**
Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου:

– 1 τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2)

$$1\ dm^2 = \frac{1}{100} m^2 = 0,01\ m^2$$

– 1 τετραγωνικό εκατοστόμετρο (cm^2)

$$1\ cm^2 = \frac{1}{10.000} m^2 = 0,0001\ m^2$$

– 1 τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (mm^2)

$$1\ mm^2 = \frac{1}{1.000.00} m^2 = 0,000001\ m^2$$

• **Στην Ελλάδα ως μονάδα επιφανείας χρησιμοποιούμε το στρέμμα.**

1στρέμμα= 1000 m^2

$$1\ Km^2 = 1.000.000\ m^2 = 10^6\ m^2$$

Μονάδες μέτρησης όγκου

• Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι το **κυβικό μέτρο** (συμβολίζεται με **m^3**) που είναι ο όγκος ενός κύβου ακμής ενός μέτρου.
Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου:

– 1 κυβικό δεκατόμετρο (dm^3)

$$1\ dm^3 = \frac{1}{1.000}\ m^3 = 0,001\ m^3$$

– 1 κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3)

$$1\ cm^3 = \frac{1}{1.000.000}\ m^3 = 0,000001\ m^3$$

– 1 κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3)

$$1\ mm^3 = \frac{1}{1.000.000.000}\ m^3 = 0,000000001\ m^3$$

• Για τη μέτρηση του όγκου χρησιμοποιούμε και το **dm^3** που ονομάζεται και **λίτρο (lt)**.

$$1\ lt = 1\ dm^3 = 0,001\ m^3$$

• Το **cm^3** λέγεται **χιλιοστόλιτρο (ml)**

$$1\ ml = 0,001\ lt = 1cm^3 = 0,000001\ m^3$$

Μονάδες μέτρησης χρόνου

• Η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το **δευτερόλεπτο** (συμβολίζεται με s)

Πολλαπλάσια:

- 1 λεπτό (min) = 60 s
- 1 ώρα (h) = 60 min = 3.600 s
- 1 ημέρα = 24 h = 1.440 min = 86.400 s

Μονάδες μέτρησης μάζας

• **Η βασική μονάδα μέτρησης μάζας είναι το χιλιόγραμμο ή κιλό** (συμβολίζεται με **Kg**)

Υποδιαιρέσεις του κιλού:

- 1 γραμμάριο (g) 1 g = 0,001 Kg
- 1 χιλιοστόγραμμο (mg) 1 mg = 0,001 g= 0,000001 Kg

Πολλαπλάσιο του κιλού:

- 1 τόνος (t) 1 t = 1000 Kg

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

***1.** Να εκφραστεί το μήκος των 2.754,389 m, σε όλες τις υποδιαιρέσεις του m.*

Λύση

Για τις μετατροπές από μία μονάδα σε άλλη, φτιάχνουμε μια **“σκάλα”**, που για να την **“ανέβουμε”**, πρέπει από κάθε σκαλοπάτι στο επόμενο, να **διαιρούμε με το 10**, ενώ για να την **“κατέβουμε”** πρέπει να **πολλαπλασιάσουμε με το 10**.

2754,389 m	m	2754,389 m
↑ : 10	↑ : 10 · 10 ↓	↓ · 10
27543,89 dm	dm	27543,89 dm
↑ : 10	↑ : 10 · 10 ↓	↓ · 10
275438,9 cm	cm	275438,9 cm
↑ : 10	↑ : 10 · 10 ↓	↓ · 10
2754389 mm	mm	2754389 mm

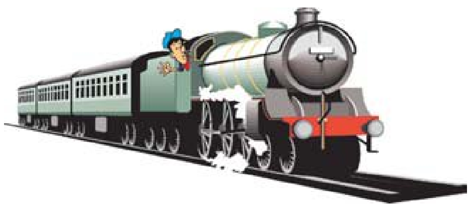
2. ***Η επιφάνεια ενός κύβου έχει εμβαδόν 96 cm^2. Να βρεθεί ο όγκος του.***

Λύση

Επειδή ο κύβος έχει 6 έδρες, η κάθε έδρα του θα έχει εμβαδόν $96\ cm^2 : 6 = 16\ cm^2$.
Αλλά είναι $16\ cm^2 = 4\ cm \cdot 4\ cm = (4\ cm)^2$, άρα, η ακμή του κύβου είναι 4 *cm*. Επομένως, ο όγκος του κύβου είναι: $(4\ cm)^3 = 4\ cm \cdot 4\ cm \cdot 4\ cm = 64\ cm^3$

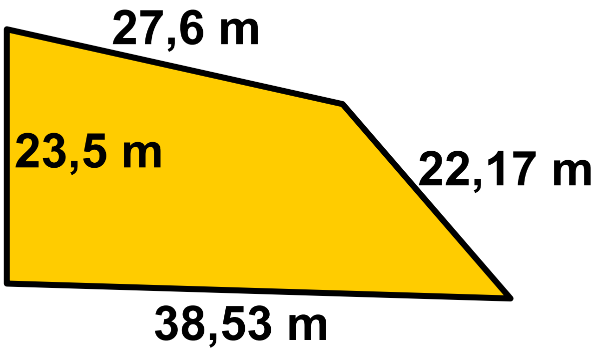
3. ***Μια αμαξοστοιχία διανύει την απόσταση Αθήνας - Πύργου σε 4 ώρες και 57 λεπτά. Αν η αμαξοστοιχία ξεκινά από την Αθήνα στις 9:10 π.μ., ποια ώρα θα φτάσει στον Πύργο;***

Λύση



Η αμαξοστοιχία θα φτάσει στις
9h 10min + 4h 57min = 13h 67min = 14h 7min,
δηλαδή, θα φτάσει στον Πύργο στις 2:07 μ.μ., μετά το μεσημέρι.

4. ***Να βρεθεί η περίμετρος του σχήματος:***
(α) σε μέτρα,
(β) σε εκατοστά και
(γ) σε χιλιόμετρα.



Λύση

(α) Η περίμετρος σε μέτρα είναι ίση με το άθροισμα των μηκών των πλευρών του, δηλαδή:
26,6 m + 23,5 m + 22,17 m + 38,53 m = 111,8 m.

(β) Είναι 111,8 m =111,8 m • 0,001 = 0,1118 Km.

(γ) Επίσης είναι 111,8 m • 100 = 11180 cm.

5. ***Μια δεξαμενή νερού τρύπησε και χύνονται 2 σταγόνες κάθε δευτερόλεπτο. Αν οι 25 σταγόνες έχουν μάζα 1,5 g, να βρεθεί η μάζα του νερού που χάνεται κάθε ώρα.***

Λύση

Κάθε δευτερόλεπτο χύνονται 2 σταγόνες νερού, άρα σε 1h = 3600s θα χυθούν: 3600 • 2 = 7200 σταγόνες νερού. Αυτές θα έχουν μάζα: (7200 : 25) • 1,5 g = 288 • 1,5 g = 432 g = 0,432 Kg

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Να συμπληρώσεις τα κενά:***

(α) 23 dm = …………… cm,
(β) 3,1 m = …………… Km,
(γ) 45,83 cm = …………… m,
(δ) 67,2 Km = …………… mm,
(ε) 95,5 mm = …………… cm.

2. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ακμές μήκους α = 3,1 m, β = 4,2 m και γ= 2,3 m. Να υπολογίσεις το μήκος των ακμών του σε mm και να το γράψεις σε τυποποιημένη μορφή.

3. Γράψε τα παρακάτω μήκη σε αύξουσα σειρά: 986 m, 0,023 Km, 456 cm, 678 dm.

4. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις πλευρών α = 23 cm και β = 45 cm. Να βρεις το εμβαδόν του, σε cm^2 και σε mm^2.

5. Συμπλήρωσε τα κενά:

(α) 56 Km^2 = ……………… m^2,

(β) 0,987 στρέμματα = ………….. m^2,

(γ) 350 στρέμματα = …………….. m^2.

6. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 210 m. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του σε m^2 και σε στρέμματα.

7. Μια αυλή σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, έχει διαστάσεις 5 m και 7,2 m. Θέλουμε να τη στρώσουμε, με τετράγωνες πλάκες, πλευράς 40 cm. Πόσες πλάκες θα χρειαστούμε;

8. Ο όγκος ενός στερεού είναι 15 dm^3 29 cm^3. Να βρεις τον όγκο του στερεού σε cm^3, m^3 και mm^3.

***9.** Ένας οινοπαραγωγός έχει αποθηκεύσει το κρασί του σε 3 ίσες δεξαμενές, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, με διαστάσεις 3 m, 2 m και 5 m. Αν πουλήσει το κρασί του προς 4 € το λίτρο, πόσα χρήματα θα εισπράξει;*

***10.** Να υπολογίσεις τον χρόνο, από τις 8h 10min το πρωί, ως τις*
5h 20min το απόγευμα.

***11.** Συμπλήρωσε τα κενά:*
(α) 4h 52min = ... min
(β) 3h 12min = ... min = ... s
(γ) 5h 20min 30s = ... min = ... s
(δ) 56min 45s = ... min = ... s.

***12.** Να υπολογίσεις: (α) το $\frac{1}{10}$ της ώρας, (β) το $\frac{1}{5}$ της ώρας, (γ) το $\frac{1}{6}$ της ώρας.*

***13.** Διαθέτουμε σταθμά των 50 g, 500 g και δύο σταθμά του 1 Kg. Πώς θα ζυγίσουμε ένα βάρος*
(α) 3 Kg και 600 g και (β) 2 Kg και 450 g.

***14.** Πώς θα ζυγίσουμε (α) ένα σώμα μάζας 5 Kg, με σταθμά των 9 Kg, 3 Kg και 1 Kg*
(β) ένα σώμα μάζας 3 Kg, με σταθμά 10 Kg, 5 Kg και 1 Kg.

***15.** Διαθέτουμε τρία δοχεία που χωράνε 2 lt, 0,5 lt και 0,1 lt. Πώς θα μετρήσουμε ένα υγρό, όγκου*
(α) 5 lt, (β) 2,8 lt, (γ) 2,4 lt.

16. Σε μια πολυκατοικία θέλουν να κατασκευάσουν μια δεξαμενή που να χωράει 3 t πετρέλαιο και να έχει μήκος 2,5 m και πλάτος 1 m. Αν γνωρίζεις ότι ο 1 t πετρελαίου έχει όγκο 1200 lt, υπολόγισε το ύψος της δεξαμενής και πόσα lt πετρελαίου αντιστοιχούν σε κάθε cm ύψους;

17. Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 1,2 m και βάση τετράγωνο πλευράς 80 cm. Μια αντλία αδειάζει από την δεξαμενή 8 lt το λεπτό. Να βρεθεί: (α) σε πόσο χρόνο η στάθμη του νερού θα κατέβει κατά 10 cm, (β) σε πόσο χρόνο θα αδειάσει η δεξαμενή και (γ) πόσο θα κατέβει η στάθμη του νερού σε μισή ώρα.

18. Ένας ποδηλάτης διήνυσε μια απόσταση σε χρόνο 1h 15 min, ενώ ένας δεύτερος διήνυσε την ίδια απόσταση σε χρόνο 1h 45min.
(α) Ποιο μέρος του χρόνου του δεύτερου είναι ο χρόνος του πρώτου ποδηλάτη; (β) Ποιο μέρος του χρόνου του πρώτου είναι ο χρόνος του δεύτερου ποδηλάτη; Τι παρατηρείς;

Σε περιπτώσεις που οι αποστάσεις που μετράμε είναι πολύ μεγάλες, χρησιμοποιούμε ειδικές μονάδες όπως:
- ***Την αστρονομική μονάδα (U.A.), που είναι η απόσταση Γης Ήλιου και ισούται με 149.600.000 Km.***
- ***Το έτος φωτός (ε.φ.) που είναι η απόσταση που διανύει το φως, σε ένα έτος και ισούται με 9.461.000.000.000 Km.***

Σε περιπτώσεις που οι αποστάσεις που μετράμε είναι πολύ μικρές (βακτηρίδια, μικρόβια, μόρια, άτομα κ.λπ.) χρησιμοποιούμε ειδικές μονάδες, όπως:

- *Το μικρόμετρο (μm) που ισούται με 0,001 mm*
- *Το νανόμετρο (nm) που ισούται με 0,000 001 mm.*
- *Το Angstrom (Å) που ισούται*

με 0,000 000 1 mm.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο άνθρωπος από τα πρώτα του βήματα φαίνεται να αναζήτησε τρόπους σύγκρουσης μεγεθών όπως είναι το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, ο χρόνος και το βάρος ή η μάζα των διαφόρων αντικειμένων που χρησιμοποιούσε, αντάλλασσε, εμπορευόταν κ.λπ.
Οι ανθρώπινες επιλογές για τον καθορισμό των “μέτρων και σταθμών” είχαν ανέκαθεν και κοινωνικό, πολιτιστικό, οικονομικό, ιστορικό, επιστημονικό αλλά και πολιτικό χαρακτήρα.

▶ *Προσπάθησε να βρεις και να κατάγράψεις (σε ένα σχετικό πίνακα) τα “μέτρα και σταθμά” για τα βασικά μεγέθη (μήκος, επιφάνεια, όγκος, χρόνος και βάρος) που χρησιμοποιήθηκαν από το 3000 π.Χ. μέχρι σήμερα, από διάφορους λαούς (Αιγυπτίους, Βαβυλώνιους, Ινδούς, Κινέζους, Αρχαίους Έλληνες, Ρωμαίους, Άγγλους, Γάλλους, Ολλανδούς, Αμερικάνους, Ευρωπαίους και*

Νεοέλληνες), τα οποία διατηρήθηκαν για μεγάλο χρονικό διάστημα, ώστε να είναι άξια λόγου για να αναφερθούν.

- ***Πότε, με ποιο τρόπο, για ποιο λόγο και από ποιους έγιναν προσπάθειες να επικρατήσει ένα διεθνές σύστημα μέτρησης μεγεθών; Γιατί απέτυχαν μερικές προσπάθειες από αυτές;***
- ***Πόσο ρόλο έπαιξε στις τελικές επιλογές για τα «μέτρα και σταθμά» των βασικών μεγεθών, ο επιστημονικός παράγοντας;***
- ***Ποια είναι η κατάσταση που επικρατεί σήμερα διεθνώς, για τα «μέτρα και σταθμά» των βασικών μεγεθών;***

Ανακεφαλαίωση

Δεκαδικοί αριθμοί

Ορισμοί

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει παρανομαστή μια δύναμη του 10. Κάθε δεκαδικός αριθμός διακρίνεται σε ακέραιο μέρος και δεκαδικό μέρος, που διαχωρίζονται από την υποδιαστολή.

Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $α \cdot 10^{ν}$, δηλαδή, ως γινόμενο ενός αριθμού α επί μία δύναμη του 10. Ο αριθμός α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10. Τη μορφή αυτή ονομάζουμε τυποποιημένη.

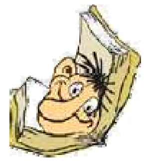
Πράξεις μεταξύ δεκαδικών αριθμών

Η Πρόσθεση δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και στους φυσικούς αριθμούς. Τοποθετούμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο, έτσι ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη και προσθέτουμε τα ψηφία της ίδιας τάξης.

Η Αφαίρεση δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και στους φυσικούς αριθμούς. Τοποθετούμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο, έτσι ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη και αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας στήλης.

Ο Πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και των φυσικών αριθμών. Τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.

Η Διαίρεση γίνεται όπως και η ευκλείδεια διαίρεση. Πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτη και το διαιρετέο με την κατάλληλη δύναμη του 10 έτσι ώστε να γίνουν και οι δύο φυσικοί αριθμοί.
Όταν εξαντληθεί το ακέραιο μέρος του διαιρετέου, «κατεβάζουμε» το **μηδέν** ως πρώτο δεκαδικό ψηφίο από τον διαιρετέο και τοποθετούμε στο πηλίκο υποδιαστολή.



Όταν πολλαπλασιάζουμε με *0,1, 0,01, 0,001, ...* ή όταν διαιρούμε με *10, 100, 1000, ...*, ένα δεκαδικό αριθμό μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά μία, δύο, τρεις …… αντίστοιχα θέσεις.
Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα δεκαδικό αριθμό με *10, 100, 1000, ...* μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα δεξιά μία, δύο, τρεις, ... θέσεις, αντίστοιχα.

Οι Δυνάμεις των δεκαδικών αριθμών έχουν τις ιδιότητες των δυνάμεων των φυσικών αριθμών. Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που έχει το αποτέλεσμα, προκύπτει από το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της βάσης, επί τον εκθέτη της δύναμης.

Προτεραιότητα Πράξεων

1 Δυνάμεις ⇨ 2 Πολλαπλασιασμοί –Διαιρέσεις ⇨

⇨ 3 Προσθέσεις και Αφαιρέσεις.

Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά.

Μονάδες Μέτρησης

Μήκους:	το μέτρο (1m)
Υποδιαιρέσεις:	$1\ m = 10\ dm = 10^2\ cm = 10^3\ mm$
Πολλαπλάσια:	$1\ Km = 10^3\ m$
Επιφάνειας:	το τετραγωνικό μέτρο ($1m^2$)
Υποδιαιρέσεις:	$1\ m^2 = 10^2\ dm^2 = 10^4\ cm^2 = 10^6\ mm^2$
Πολλαπλάσια	1 στρέμμα = $10^3\ m^2$
Όγκου:	το κυβικό μέτρο ($1\ m^3$)
Υποδιαιρέσεις:	$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$
Πολλαπλάσια:	$1\ lt = 0{,}01\ m^3$
Χρόνου:	το δευτερόλεπτο (1 s)
Πολλαπλάσια:	1min = 60s, 1 h = 3600 s
Μάζας:	το χιλιόγραμμο (1 Kg)
Υποδιαιρέσεις:	$1\ Kg = 10^3\ gr = 10^6\ mg$
Πολλαπλάσια:	$1t = 10^3\ Kg$

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

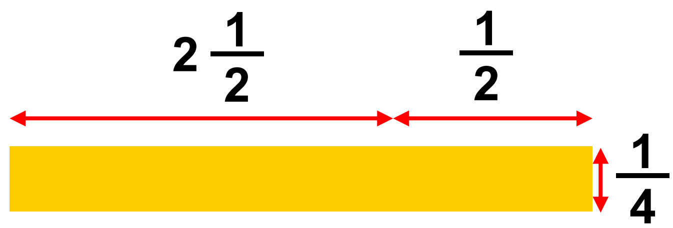
Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος

1. *Αν διαιρέσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με το 4, το κλάσμα γίνεται 4 φορές μικρότερο.*

2. *Αν* $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta}$ *τότε* $\alpha = \gamma$.

3. $1 : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

4. *Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι* $\frac{3}{4}$



5. *Όταν διαιρέσουμε τον παρονομαστή του* $\frac{5}{8}$ *με το 2 το κλάσμα διπλασιάζεται.*

6. *Όταν πολλαπλασιάσουμε το* $\frac{7}{9}$ *με το 3 το κλάσμα που προκύπτει είναι τρεις φορές μικρότερο του αρχικού.*

7. *Το κλάσμα* $\dfrac{1\frac{5}{8}}{3}$ *είναι ίσο με* $\frac{5}{40}$

8. *Το γινόμενο των* $\frac{2}{3}$ *και* $\frac{3}{4}$ *ισούται με* $\frac{1}{2}$

☐ 9. Αν α < β τότε $\frac{\alpha}{\beta+1}$ μεγαλύτερο του 1.

☐ 10. $\frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = \frac{35}{56} = \frac{1250}{2000} = 0{,}625$

☐ 11. $2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{45}{1000} = 2{,}175$

☐ 12. Οι αριθμοί 7,2 και $\frac{5}{36}$ είναι αντίστροφοι.

☐ 13. Ο αριθμός $\frac{5{,}2}{7}$ είναι δεκαδικό κλάσμα

☐ 14. $\frac{149}{231} > \frac{267}{452}$

☐ 15. $\frac{1050}{3100} > \frac{2593}{4650}$

☐ 16. $\frac{3{,}4}{7{,}3} = 0{,}4659$

☐ 17. $\frac{1{,}028}{1{,}2} = 0{,}856666\ldots$

☐ 18. $\frac{34{,}5}{5{,}7} = 5{,}7$

☐ 19. $\frac{1{,}25}{1{,}85} = 0{,}675675675\ldots$

☐ 20. $\frac{0{,}69}{4{,}6} = 0{,}15$

☐ 21. Αν $\frac{x}{3} = 7$ το x είναι ο αριθμός 23

ΜΕΡΟΣ Α΄

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΡΧΥΤΑΣ Ο ΤΑΡΑΝΤΙΝΟΣ
(428 – 365 π.Χ.)

Εξισώσεις και προβλήματα

4.1 Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις: α+x=β, x–α=β, α–x=β, α•x=β, α:x=β, x:α=β

- *Κατανοώ την έννοια της εξίσωσης*
- *Ελέγχω αν κάποιος αριθμός είναι λύση εξίσωσης*
- *Λύνω με την βοήθεια του ορισμού των πράξεων της μορφής: α+x=β, x–α=β, α–x=β, α•x=β, α:x=β και x:α=β*

4.2 Επίλυση προβλημάτων

- *Λύνω προβλήματα τεσσάρων πράξεων*

4.3 Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

- *Λύνω απλά προβλήματα με την βοήθεια των εξισώσεων των παραπάνω μορφών*

Α.4.1. Η έννοια της εξίσωσης
Οι εξισώσεις: α + x = β, x – α = β, α – x = β, αx = β, α : x = β και x : α = β

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

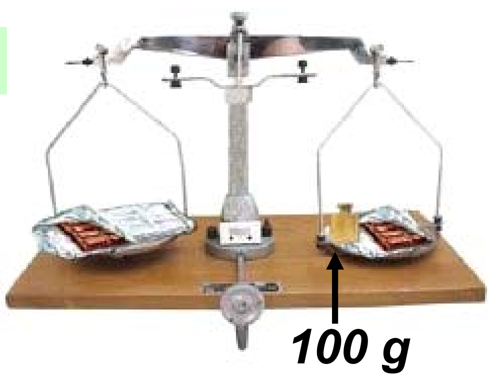
Προσπάθησε να μεταφράσεις τις παρακάτω προτάσεις, με τη βοήθεια αριθμών και γραμμάτων.

− ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού
− ένας άρτιος φυσικός αριθμός
− ένας περιττός φυσικός αριθμός
− τα πολλαπλάσια του 3
− το διπλάσιο ενός αριθμού
− ένας αριθμός αυξάνεται κατά 8
− ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 4
− το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2, μας δίνει 22
− αν σε ένα αριθμό προσθέσουμε 5, το άθροισμα γίνεται 8

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Γράψε συντομότερα τις εκφράσεις:
(α) x + x + x + x, (β) α + α + α + β + β,
(γ) 3 · α + 5 · α, (δ) 18 · x + 7 · x + 4 · x,
(ε) 15 · β – 9 · β.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η



Μια ζυγαριά ισορροπεί, όταν βάλουμε από το ένα μέρος μια σοκολάτα, της οποίας δεν γνωρίζουμε το βάρος και στο

άλλο μέρος 100 g και μισή σοκολάτα.

- ***Μπορείς να βρεις μια ισότητα που να περιγράφει αυτή την ισορροπία;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Να αντικαταστήσεις το x, με τους αριθμούς 1, 3, 4, 5, 6 και 11, σε κάθε ισότητα της πρώτης στήλης, του παρακάτω πίνακα. Βρες ποιος από αυτούς την επαληθεύει και ποιος όχι.

- ***Συμπλήρωσε τις δύο άλλες στήλες του πίνακα, σύμφωνα με τα συμπεράσματά σου.***
- ***Μπορείς, με τη βοήθεια του ορισμού των πράξεων, να φθάσεις στα ίδια αποτελέσματα;***

Εξίσωση	**Αριθμοί που την επαληθεύουν**	**Αριθμοί που δεν την επαληθεύουν**
$x - 4 = 1$		
$5 - x = 4$		
$2x = 8$		
$\frac{6}{x} = 2$		
$\frac{x}{3} = 3$		
$x + 7 = 30$		

Στην ισότητα 2 • 6 = 12 το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να επιβεβαιώσουμε ότι είναι σωστή. Η ισότητα 2 • x =12 δεν είναι η ίδια. Αυτό το x που περιέχει «κρύβει» έναν αριθμό που αν τον βάλουμε στη θέση του επαληθεύει αυτή την ισότητα. Αν βάλουμε οποιαδήποτε άλλη τιμή στη θέση του x, η ισότητα 2 • x =12 δεν ισχύει. Γι' αυτό τη σχέση δεν τη λέμε ισότητα, αλλά εξίσωση. Και ο x είναι ο άγνωστος αυτής

*της εξίσωσης. Όταν εμφανίζεται αυτός ο περίφημος **άγνωστος** x, ακολουθεί και ένα **πρόβλημα**. Τώρα, η σχέση η δική μας με τέτοιου είδους «σχέσεις» δεν είναι καθόλου προβληματικές αν προσέξουμε καλά όσα ακολουθούν.*

Μαθαίνουμε

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να διατυπώσουμε μια πρόταση με τη βοήθεια αριθμών και γραμμάτων, ενώ για να λύσουμε ένα πρόβλημα μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ισότητα με γράμματα και αριθμούς. Τέτοιες ισότητες τις λέμε εξισώσεις.

- **Εξίσωση με έναν άγνωστο** είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (άγνωστος).

Οι ισότητες:

$x + 5 = 12$,	$y - 2 = 3$,	$10 - z = 1$
$\omega : 5 = 4$,	$7 \cdot \varphi = 12$,	$24 : \psi = 6$

είναι εξισώσεις

- **Λύση ή ρίζα της εξίσωσης** είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης
$x - 7 = 5$ είναι ο αριθμός 12 διότι $12 - 7 = 5$
Τη λύση τη γράφουμε: $x = 12$

- Η διαδικασία, μέσω της οποίας, βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης, λέγεται **επίλυση της εξίσωσης.**

Τον άγνωστο μιας εξίσωσης τον συμβολίζουμε με ένα γράμμα π.χ. x, y, z, ω, φ, ψ κ.λπ.

• Μια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα ή αόριστη**, όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.

Οι εξισώσεις

$x = x$ ή $0 \cdot 2 = 0$

είναι αόριστες ή ταυτότητες.

• Μια εξίσωση λέγεται **αδύνατη**, όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει

Οι εξισώσεις

$x + 2 = x + 6$ ή $0 \cdot \omega = 5$

είναι αδύνατες.

• Βάσει των ορισμών των πράξεων οι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων είναι:

$\alpha + x = \beta \rightarrow x = \beta - \alpha$,
$x - \alpha = \beta \rightarrow x = \beta + \alpha$,
$\alpha - x = \beta \rightarrow x = \alpha - \beta$,
$\alpha \cdot x = \beta \rightarrow x = \beta : \alpha$,
$x : \alpha = \beta \rightarrow x = \beta \cdot \alpha$ και
$\alpha : x = \beta \rightarrow x = \alpha : \beta$.

Οι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων είναι:

$x + 5 = 12 \rightarrow x = 12 - 5$ ή $x = 7$,
$y - 2 = 3 \rightarrow y = 3 + 2$, ή $y = 5$,
$10 - z = 1 \rightarrow z = 10 - 1$, ή $z = 9$,
$7 \cdot \varphi = 14 \rightarrow \varphi = 14 : 7$, ή $\varphi = 2$,
$\omega : 5 = 4 \rightarrow \omega = 4 \cdot 5$ ή $\omega = 20$,
$24 : \psi = 6 \rightarrow \psi = 24 : 6$ ή $\psi = 4$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μια δεξαμενή χωρητικότητας 6 m^3 που έχει μήκος 1,5 m και πλάτος 2 m , έχει ύψος (α) 1,5 m ή (β) 3 m ή (γ) 2 m;

Λύση

Αν συμβολίσουμε με x το ύψος της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα ισούται με: $V = 1,5 \cdot 2 \cdot x$. Όμως γνωρίζουμε ότι ο όγκος της δεξαμενής είναι 6 m^3, άρα $3 \cdot x = 6$. (Δεν γράφουμε τις μονάδες στις εξισώσεις, αλλά πρέπει να γνωρίζουμε ποιες μονάδες χρησιμοποιούμε).

Επομένως, $x = 6 : 3$, δηλαδή $x = 2$m. Συνεπώς το σωστό ύψος της δεξαμενής είναι τα 2 m.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αντιστοίχισε τις προτάσεις των γραμμών του πρώτου πίνακα με τις εκφράσεις αριθμών και γραμμάτων των γραμμών στο δεύτερο πίνακα.

το τριπλάσιο ενός αριθμού	$x – y > 20$
το δεκαπλάσιο ενός αριθμού	$x \cdot y = 32$
ένας αριθμός αυξάνεται κατά 12	$3 \cdot x$
ένας αριθμός ελαττώνεται κατά 5	$x + 12$
η διαφορά δύο αριθμών είναι μεγαλύτερη του 20	$10 \cdot x$
το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με 32	$x – 5$

2. ***Διατύπωσε με λόγια τις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:***

(α) $3 \cdot x + 25$, *(β)* $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x - 7 = 2$,

(γ) $\alpha - 2 \cdot \beta$, *(δ)* $4 \cdot \kappa + 7 \cdot \kappa = 88$

3. ***Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι α. Πόση είναι η περίμετρος του και πόσο το εμβαδόν του;***

4. ***Γράψε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:***

(α) $x + x$, *(β)* $\alpha + \alpha + \alpha$, *(γ)* $3 \cdot \alpha + 52 \cdot \alpha$,

(δ) $2 \cdot \beta + \beta + 3 \cdot \alpha + 2 \cdot \alpha$, *(ε)* $4 \cdot x + 8 \cdot x - 3 \cdot x$,

(στ) $7 \cdot \omega + 4 \cdot \omega - 10 \cdot \omega$

5. ***Αν*** $x \cdot y = \frac{2}{9}$ ***και*** $z = \frac{3}{5}$, ***να βρεθεί το*** $x \cdot (y \cdot z)$.

6. ***Στην εξίσωση*** $2 + \alpha = x$, ***το α και το x είναι φυσικοί αριθμοί. Ποια από τις τιμές 0, 3, 1 μπορεί να πάρει το x;***

7. ***Να εξετάσεις, αν ο αριθμός 12 είναι η λύση της εξίσωσης:*** $x + 13 = 25$.

8. ***Τοποθέτησε ένα "X" στην θέση εκείνη που ο αριθμός επαληθεύει την αντίστοιχη εξίσωση:***

	1	2	3	4	5	6	7	8
$x - 2 = 4$								
$1 + y = 4$								
$18 - \omega = 10$								
$2 - \alpha = 1$								
$93 - \beta = 86$								

9. ***Ποιος αριθμός επαληθεύει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις;***

(α) $x + 4,9 = 15,83$ *(β)* $40,4 + x = 93,19$

(γ) $53,404 - x = 4,19$ *(δ)* $38 - x = 7,1$

10. ***Ποια είναι η τιμή του x για να ισχύει;***

(α) $\frac{3}{x} = \frac{12}{20}$ *(β)* $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$

(γ) $\frac{35}{40} = \frac{x}{8}$ *(δ)* $\frac{49}{5} = x + \frac{4}{5}$

11. ***Βρες την τιμή του φυσικού αριθμού x:***

(α) $\frac{x+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ *(β)* $\frac{5}{8} + \frac{x}{16} = \frac{3}{4}$

(γ) $\frac{3}{5} + \frac{x+2}{10} = 1$

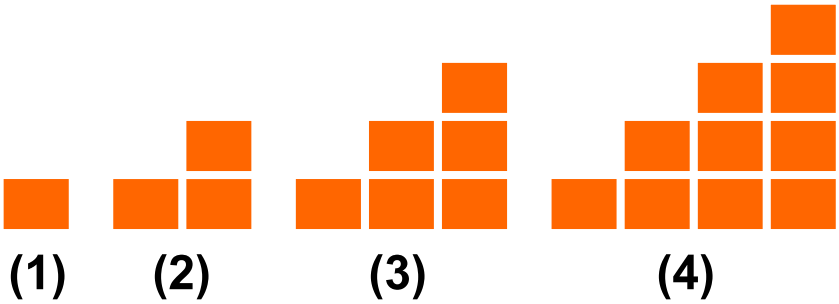
12. ***Λύσε τις εξισώσεις:*** *(α)* $v + 3 = 4$, *(β)* $x - 2 = 8$, *(γ)* $t + 4 + 1 = 3 + 19$, *(δ)* $6 - x = 5$.

13. ***Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσεις στον 4, για να προκύψει ο αντίστροφος του*** $\frac{5}{21}$***;***

14. ***Σε έναν αριθμό προσθέτουμε 5 και παίρνουμε άθροισμα 313. Ποιος είναι ο αριθμός;***

15. ***Τα τετράγωνα που αποτελούν τους "δομικούς λίθους" με τους οποίους κατασκευάζουμε τα παρακάτω σχήματα, έχουν πλευρά ίση με 1 cm.***

(α) Βρες την περίμετρο του πέμπτου σχήματος και εξήγησε πώς έφτασες στην απάντηση σου.
(β) Γράψε ένα τύπο με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείς να υπολογίσεις την περίμετρο κάθε σχήματος.
(γ) Ποια είναι η σειρά του σχήματος του οποίου η περίμετρος είναι 128 cm;



Α.4.2. Επίλυση προβλημάτων

Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

- ***Πότε στη ζωή μας, λέμε ότι έχουμε "πρόβλημα";***
- ***Τι επιδιώκουμε να πετύχουμε όταν λέμε ότι: "λύνουμε ένα πρόβλημα";***
- ***Τι εννοούμε όταν λέμε ότι θέλουμε να βρούμε μία "λύση του προβλήματος";***
- ***Όλα τα προβλήματα λύνονται με τη βοήθεια των Μαθηματικών.***
- ***Ποιες είναι οι αναγκαίες ενέργειες που πρέπει να κάνουμε για να καταφέρουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε επιτύμβια στήλη είναι γραμμένο το παρακάτω πρόβλημα, η λύση του οποίου, μας δίνει την ηλικία του μεγάλου αρχαίου Έλληνα μαθηματικού Διόφαντου:

"ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ ΗΤΑΝ ΠΑΙΔΙ, ΤΟ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΜΕΤΑ ΤΟΥΤΟ ΒΓΑΖΕΙ ΤΡΙΧΕΣ ΣΤΑ ΜΑΓΟΥΛΑ, ΜΕΤΑ ΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΠΑΝΤΡΕΥΤΗΚΕ, ΠΕΝΤΕ ΕΤΗ ΜΕΤΑ ΤΟ ΓΑΜΟ ΤΟΥ ΓΕΝΝΗΣΕ ΕΝΑΝ ΥΙΟ, ΠΟΥ ΑΛΙΜΟΝΟ, ΤΟ ΑΤΥΧΕΣ ΠΑΙΔΙ, ΟΤΑΝ ΕΦΤΑΣΕ ΣΤΟ ΕΝΑ ΔΕΥΤΕΡΟ ΤΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ ΤΟΥ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ, ΠΕΘΑΝΕ, ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΟΤΕ ΕΠΙ ΤΕΣΣΕΡΑ ΕΤΗ ΠΑΡΗΓΟΡΟΥΣΕ ΤΟ ΠΕΝΘΟΣ ΤΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΕΤΣΙ ΤΕΡΜΑΤΙΣΕ ΤΗ ΖΩΗ ΤΟΥ"

Ας ακολουθήσουμε τώρα την αντίστροφη με την παραπάνω διαδικασία, δηλαδή της κατασκευής προβλημάτων, των οποίων η λύση βρίσκεται με την επίλυση μιας συγκεκριμένης εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να περιγράψεις κάποιο πρόβλημα, που να λύνεται με τη βοήθεια της εξίσωσης: $2 \cdot x + 800 = 1000$

Λύση

Για παράδειγμα τα δύο παρακάτω προβλήματα περιγράφονται από την εξίσωση αυτή.

- **Με τι ισούται η μία πλευρά του ορθογωνίου, που έχει περίμετρο 1000 m και του οποίου η άλλη πλευρά είναι 400 m;**
- **Πόσο ζυγίζει καθένα από τα δύο κιβώτια, με τα οποία είναι φορτωμένο ένα αυτοκίνητο, που έχει βάρος 800 Kg, όταν η πλάστιγγα που ανέβηκε δείχνει 1000 Kg;**

➢ ***Προσπάθησε να διατυπώσεις και άλλα προβλήματα που λύνονται με την παραπάνω εξίσωση.***

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Πρόβλημα ονομάζουμε την κατάσταση, που δημιουργείται, όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθειά μας να φτάσουμε σε ένα συγκεκριμένο στόχο.**
- **Λύση ενός προβλήματος είναι η επίτευξη του στόχου.**
- **Επίλυση ενός προβλήματος ονομάζεται η διαδικασία, με την οποία επιτυγχάνεται η λύση του.**

Για τη λύση των προβλημάτων, με τη βοήθεια των εξισώσεων, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

▶ Προσδιορίζουμε το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και το εκφράζουμε με ένα γράμμα (x ή ν ή ζ ή ω κ.τ.λ.), που είναι ο "άγνωστος" του προβλήματος.
▶ Εκφράζουμε στοιχεία του προβλήματος με τη βοήθεια του αγνώστου.
▶ Περιγράφουμε με μία εξίσωση το πρόβλημα.
▶ Επιλύουμε την εξίσωση του προβλήματος.
▶ Επαληθεύουμε τη λύση που βρήκαμε.

Όμως, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι:

◆ υπάρχουν και προβλήματα που δεν λύνονται με εξισώσεις και
◆ υπάρχουν και άλυτα προβλήματα ή προβλήματα των οποίων δεν μπορούμε να βρούμε τη λύση.

Α.4.3. Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

***1.** Η Χριστίνα ξόδεψε τα μισά της χρήματα για να αγοράσει 2 τετράδια και μαρκαδόρους. Αν είναι γνωστό, ότι κάθε τετράδιο στοιχίζει 1 € και όλοι οι μαρκαδόροι 3 €, ποιο είναι το ποσό των χρημάτων που είχε η Χριστίνα πριν από τις αγορές αυτές;*

Λύση

Το ζητούμενο του προβλήματος είναι το ποσό των χρημάτων που είχε η Χριστίνα, δηλαδή ο άγνωστος x του προβλήματος. Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί απλούστερα με την εξίσωση:
«τα χρήματα που ξοδεύτηκαν» = «τα χρήματα που κόστιζαν οι αγορές»

ή «τα μισά χρήματα της Χριστίνας» = «το κόστος των τετραδίων» + «το κόστος μαρκαδόρων»

ή $x : 2 = 2 \cdot 1 + 3$
ή $x : 2 = 2 + 3$
ή $x : 2 = 5$
ή $x = 5 \cdot 2$
ή $x = 10$

Επαλήθευση:
Τα μισά των 10 € είναι 5 € και τα έξοδα είναι $2 \cdot 1$ € + 3 € = 5 €.

***2.** Η δεξαμενή της κοινότητας χωράει 3.000 m^3 νερό. Κάθε μέρα ξοδεύονται 300 m^3 από τα νοικοκυριά και* *άλλα 200 m^3 από τις βιοτεχνίες. Για τη συντήρηση του δικτύου, σταμάτησε η παροχή νερού προς τη δεξαμενή. Τέσσερις ημέρες μετά την έναρξη των εργασιών αποφασίζεται να ξοδεύονται μόνο 400 m^3 συνολικά κάθε ημέρα. Πόσες ημέρες ακόμη πρέπει να κρατήσουν τα έργα συντήρησης, ώστε να μη μείνουν χωρίς νερό οι κάτοικοι της κοινότητας;*

Λύση

Το ζητούμενο του προβλήματος είναι το επιπλέον πλήθος των ημερών συντήρησης του δικτύου, δηλαδή ο άγνωστος x του προβλήματος. Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί με την εξίσωση:

"ποσό νερού που καταναλώνεται"= "ποσό νερού δεξαμενής"

ή αναλυτικότερα

"ποσό νερού που καταναλώνεται στις τέσσερις ημέρες της συντήρησης" + "ποσό νερού που καταναλώνεται στις επιπλέον ημέρες συντήρησης" = "ποσό νερού δεξαμενής"

ή $(300 + 200) \cdot 4 + 400 \cdot x = 3.000$

ή $500 \cdot 4 + 400 \cdot x = 3.000$

ή $2.000 + 400 \cdot x = 3.000$

ή $400 \cdot x = 3.000 - 2.000$

ή $400 \cdot x = 1.000$

ή $x = 1.000 : 400$

ή $x = 2,5$ ημέρες

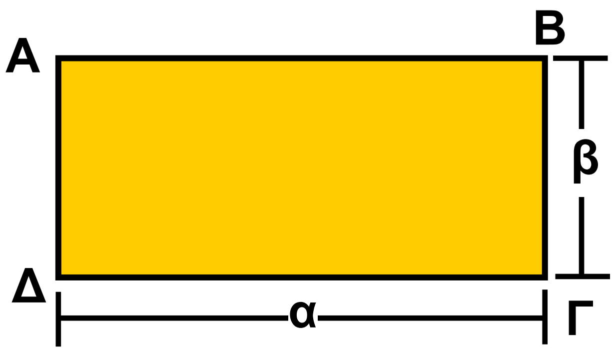
Επαλήθευση:

$2,5 \cdot 400 + 4 \cdot (200 + 300) = 3.000$

ή $1.000 + 2.000 = 3.000$ ή $3.000 = 3.000$

3. Τα οικόπεδα που διαθέτει ένα μεσιτικό γραφείο, έχουν την ίδια τιμή και είναι όλα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, με σταθερή περίμετρο 160 m. Ποιο από αυτά συμφέρει να επιλέξουμε για αγορά;

Λύση



Έστω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α και β. Τότε η περίμετρος θα είναι:

α + α + β + β ή 2α + 2β

ή 2(α + β)

Γνωρίζουμε ότι: **2(α + β) = 160**

Άρα θα είναι : **α + β = 160 : 2**

ή **α + β = 80**

Το πιο συμφέρον για αγορά είναι το οικόπεδο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν. Το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $\boxed{\mathbf{Ε = α \cdot β}}$

Φτιάχνουμε ένα πίνακα και δίνουμε διάφορες τιμές στα α και β:

α	β	α · β
10	70	700
20	60	1.200
30	50	1.500
40	40	1.600
50	30	1.500
60	20	1.200
70	10	700

Παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο με διαστάσεις ίσες
$\alpha = \beta = 40$ m .

4. Μετά τη συνεδρίαση και τα 10 μέλη του διοικητικού συμβουλίου μιας εταιρείας ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψίες. Πόσες χειραψίες γίνονται συνολικά;

Λύση

<u>1ος τρόπος:</u> **Αν υποθέσουμε ότι φεύγει ένας - ένας και χαιρετάει τους υπόλοιπους θα έχουμε ότι:**
Ο πρώτος θα ανταλλάξει, συνολικά, 9 χειραψίες. Ο δεύτερος 8, ο τρίτος 7, ο τέταρτος 6, ο πέμπτος 5, ο έκτος 4, ο έβδομος 3 ο όγδοος 2, ο ένατος 1 και δέκατος καμία. Επομένως, ο συνολικός αριθμός θα είναι: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =$
$(1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 =$
$= 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45$

Άρα, η λύση είναι ότι θα γίνουν συνολικά 45 χειραψίες.

<u>2ος τρόπος:</u> **Γνωρίζουμε ότι ο καθένας κάνει χειραψία με τους υπόλοιπους. Επομένως, αφού όλοι είναι *10*, ο καθένας θα κάνει $10 - 1 = 9$ χειραψίες. Άρα συνολικά θα γίνουν *10* φορές επί *9*, δηλαδή $10 \cdot 9 = 90$ χειραψίες. Όμως, μεταξύ δύο ανθρώπων η χειραψία είναι μία και εμείς τη μετρήσαμε διπλή (μία για καθένα από τους δύο). Επομένως, αυτές που έγιναν συνολικά θα είναι οι μισές, δηλαδή $90 : 2 = 45$.**

*Ο **Διόφαντος**(μέσα του 3ου αιώνα μ.Χ.), στην εισαγωγή των “Αριθμητικών” του, ονομάζει τον άγνωστο με τη λέξη “αριθμός” και τον συμβολίζει με το σύμβολο “ς”.*
*Αργότερα ο **Βιετ** (1540-1603) χρησιμοποιεί τα κεφαλαία φωνήεντα A, E, I, O, U, Y για να υποδηλώσει τον **άγνωστο** και τα σύμφωνα B, D, G κ.λπ. για τα **γνωστά μεγέθη**.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να βρεις έναν αριθμό που έχει τέσσερα ίδια ψηφία και διαιρείται με το 9.*

2. *Πόσοι μαθητές είναι τα $\frac{7}{10}$ των μαθητών ενός σχολείου, αν τα $\frac{2}{8}$ των μαθητών, αυτού του σχολείου, είναι 60 μαθητές;*

3. *Να βρεις τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα 1533.*

4. *Βρες το ψηφίο που λείπει από τον αριθμό 75 $\square$ 3, ώστε αυτός να διαιρείται με το 9.*

5. *Σε ένα διαγώνισμα, κάθε μαθητής πρέπει να απαντήσει σε 100 ερωτήσεις. Θα πάρει 3 μονάδες, για κάθε σωστή απάντηση και μόνο 1 μονάδα, για κάθε λανθασμένη. Ένας μαθητής πήρε συνολικά 220 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;*

6. Η διαφορά της ηλικίας της κόρης από τη μητέρα της είναι 25 χρόνια. Αν η κόρη είναι 18 ετών, πόσων ετών είναι η μητέρα;

7. Τρία αδέλφια μοιράζονται, εξίσου, μια κληρονομιά, που είναι ένα χωράφι και ένα διαμέρισμα. Ο πρώτος παίρνει το χωράφι. Ο δεύτερος παίρνει το διαμέρισμα, αλλά δίνει στον πρώτο 600 € και στον τρίτο 15.000 €. Ποια ήταν η αξία του χωραφιού και ποια του διαμερίσματος;

8. Σε κάθε μια από τις πράξεις (α) και (β) τα γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία. Αντικατέστησε τα γράμματα Α, Β, Γ και Δ με τα κατάλληλα ψηφία.

$$
(\alpha)\quad \begin{array}{r} AB \\ +\ \ 47 \\ \hline 73 \end{array}
\qquad\qquad
(\beta)\quad \begin{array}{r} \Gamma\Delta \\ -\ \ \ 8 \\ \hline \Delta 5 \end{array}
$$

9. Αν από μία ποσότητα κρασιού, αφαιρέσουμε 18 lt χωράει σε δοχεία των 7 lt. Αν γνωρίζεις ότι η ποσότητα είναι μικρότερη από 100lt και μεγαλύτερη από 90 lt, πόσα lt είναι η αρχική ποσότητα του κρασιού; Πόσα δοχεία θα χρησιμοποιήσουμε;

10. Ένας παραγωγός έφτιαξε 100 lt ξύδι και θέλει να το συσκευάσει σε μπουκάλια που χωράνε 0,75 lt. Να βρεις: (α) Πόσα μπουκάλια θα χρειαστεί, (β) Πόσα lt θα του περισσέψουν.

11. Δύο συνεργεία καθαρισμού ακτών καθαρίζουν μία μεγάλη παραλία μήκους $18\frac{3}{4}$ ***Km. Το πρώτο συνερ-***

γείο καθαρίζει $3\frac{1}{2}$ Km και το δεύτερο συνεργείο $2\frac{3}{4}$ Km, κάθε μέρα. Τα δύο συνεργεία εργάζονται, στα δύο άκρα της παραλίας, έως ότου συναντηθούν. Σε πόσες ημέρες θα έχουν ολοκληρώσει τον καθαρισμό της παραλίας;

12. Ένας υπάλληλος αποταμιεύει κάθε μήνα το $\frac{1}{15}$ του μισθού του. Αν αυξηθεί κατά το $\frac{1}{5}$ ο μισθός του, ποιο μέρος του νέου του μισθού πρέπει να αποταμιεύει, ώστε να μην αυξηθεί το ποσό που αποταμιεύει κάθε μήνα;

13. Αυτή τη χρονιά η ηλικία ενός ανθρώπου είναι πολλαπλάσιο του 7 και την επόμενη χρονιά είναι πολλαπλάσιο του 9. Αν γνωρίζουμε ότι δεν είναι αιωνόβιος, ποια είναι η ηλικία του;

ΜΕΡΟΣ Α΄

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ Ο ΠΕΡΓΑΙΟΣ
(265 – 170 π.Χ.)

5.1 Ποσοστά

- ***Κατανοώ την έννοια των ποσοστών και διαπιστώνω τη χρησιμότητα τους στις εφαρμογές***
- ***Γράφω ένα δεκαδικό κλάσμα ως ποσοστό και αντιστρόφως***

5.2 Προβλήματα με ποσοστά

- ***Λύνω προβλήματα με ποσοστά***
- ***Παριστάνω ποσοστά με διαγράμματα***

Α.5.1 Ποσοστά

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε πολλές περιπτώσεις της καθημερινής μας ζωής ακούμε εκφράσεις όπως:

- ***Πήρε αύξηση 14%.***
- ***Οι γεννήσεις μειώνονται, κατά 12%, το χρόνο.***
- ***Με συστηματική προπόνηση, ένας δρομέας αύξησε την απόδοσή του κατά 20%.***
- ***Ένα μαγαζί έκανε εκπτώσεις 60%.***
- ***Η ευρύτερη περιοχή της Αθήνας καταλαμβάνει το 3% της έκτασης της Ελλάδας και εκεί κατοικεί το 45% του πληθυσμού της Ελλάδας.***
- ***Το 40% των υποψηφίων έγραψαν πολύ καλά και το 35% κάτω από τη βάση.***
- ***Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (ΦΠΑ) 19%.***
- ***Ειδικός Φόρος Κατανάλωσης 5%.***
- ***Παρακράτηση φόρου 22%.***
- ***Επιτόκιο Καταθέσεων Ταμιευτηρίου 9,5%.***
- ***Το 25% του πληθυσμού έχει πάνω από 2 αυτοκίνητα.***
- ***Μόνο το 4% των οικογενειών έχει πάνω από 4 παιδιά.***
- ***Είναι 100% σίγουρο, ότι θα βρέξει.***
- ***Η πιθανότητα να συμβεί (ένα γεγονός) είναι 1%.***

➢ ***Προσπάθησε να εξηγήσεις τι ακριβώς εννοούμε κάθε φορά με αυτές τις εκφράσεις.***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το σύνολο των πολιτών που ψήφισαν στα χωριά Α, Β, Γ και Δ και οι ψήφοι που πήραν οι αντίστοιχοι πρόεδροι που εκλέχτηκαν.

➢ ***Βρες, ποιος από τους προέδρους που εκλέχτηκαν, είναι ο πιο δημοφιλής.***

Κοινότητα	Ψηφίσαντες	Ο πρόεδρος ψηφίστηκε από
Α	585	345
Β	3460	1802
Γ	456	312
Δ	1295	823

Σκεφτόμαστε

Βρίσκουμε τα ποσοστά, με τα οποία εκλέχτηκαν οι πρόεδροι κάθε κοινότητας και παρατηρούμε ότι ο πιο δημοφιλής πρόεδρος είναι της κοινότητας Γ και μετά έρχονται στη σειρά οι πρόεδροι των κοινοτήτων Δ, Α και Β.

Α	354 : 585 = 60,51%
Β	1082 : 3460 = 52,08%
Γ	312 : 456 = 68,42%
Δ	823 : 1295 = 63,55%

Συμβολισμοί

Μαθαίνουμε

● Το σύμβολο α% ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα **ποσοστό** και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{100}$.

• Χρησιμοποιούμε ακόμη το ποσοστό **α ‰** που διαβάζεται **ποσοστό επί τοις χιλίοις** και είναι ίσο με το $\frac{α}{1000}$.

◆ **Το ποσοστό α% του β είναι $\frac{α}{100} \cdot β$**

◆ **Τα κλάσματα μπορούν να γράφονται και ως ποσοστά.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να γραφούν, ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα παρακάτω κλάσματα:*

(α) $\frac{4}{5}$ *(β)* $\frac{3}{8}$ *(γ)* $\frac{84}{91}$

Λύση

(α) $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{80}{100} = 80\%$,

(β) $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 12{,}5}{8 \cdot 12{,}5} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$,

(γ) $\frac{84}{91} = 0{,}92 = \frac{92}{100} = 92\%$.

2. *Να γραφούν, ως κλάσματα τα ακόλουθα ποσοστά: (α)12%, (β) 73%, (γ) 32,5%.*

Λύση

(α) $12\% = \frac{2}{10} = \frac{12 : 4}{100 : 4} = \frac{3}{25}$,

(β) $73\% = \frac{73}{100}$,

(γ) $32{,}5\% = \dfrac{32{,}5}{100} = \dfrac{325}{1000} = \dfrac{13}{40}$

3. Ποια θα είναι η τιμή πώλησης ενός πουλόβερ, αξίας 150€, με επιβάρυνση ΦΠΑ 19%;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:
Τιμή πώλησης = Αξία + ΦΠΑ
Ο φόρος που αντιστοιχεί θα είναι:

$\textit{Φόρος} = \textit{Αξία} \cdot 19\% = 150 \cdot 19\% = 150 \cdot \dfrac{19}{100} = \dfrac{150 \cdot 19}{100}$

$= 28{,}5$ €.

Άρα, η τιμή πώλησης θα είναι: 150 € + 28,5 € = 178,5 € .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Γράψε ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα κλάσματα:

(α) $\dfrac{1}{5}$ (β) $\dfrac{3}{2}$ (γ) $\dfrac{1}{4}$ (δ) $\dfrac{3}{4}$ (ε) $\dfrac{3}{5}$

2. Να μετατρέψεις σε ποσοστά επί τοις εκατό, τους δεκαδικούς αριθμούς: (α) 0,52 (β) 3,41 (γ) 0,19 (δ) 0,03 (ε) 0,07.

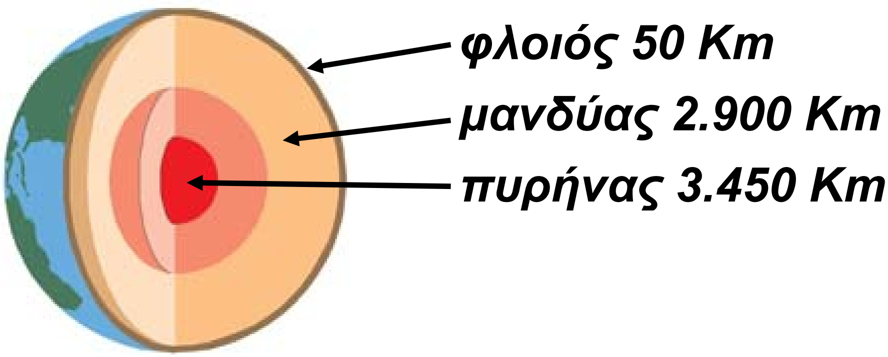
3. Να μετατρέψεις σε δεκαδικά κλάσματα τα ποσοστά: (α)15%, (β)7%, (γ)48%, (δ) 50%.
Στη συνέχεια, απλοποίησε τα δεκαδικά κλάσματα, έως ότου φτάσεις σε ανάγωγο κλάσμα.

4. Υπολόγισε: (α) το 10% των 3000€,
(β) το 45% της 1 ώρας,(γ) το 20% του λίτρου,
(δ) το 50 % των 500 γραμμαρίων, (ε) το 25% του 1 κιλού.

5. Βρες τι ποσοστό είναι: (α) τα 50 € για τα 1.000 € (β) οι 30 ημέρες για 1 έτος (γ)τα 50 στρέμματα για τα 2.500 στρέμματα (δ) οι 3 παλάμες για τα 10 μέτρα.

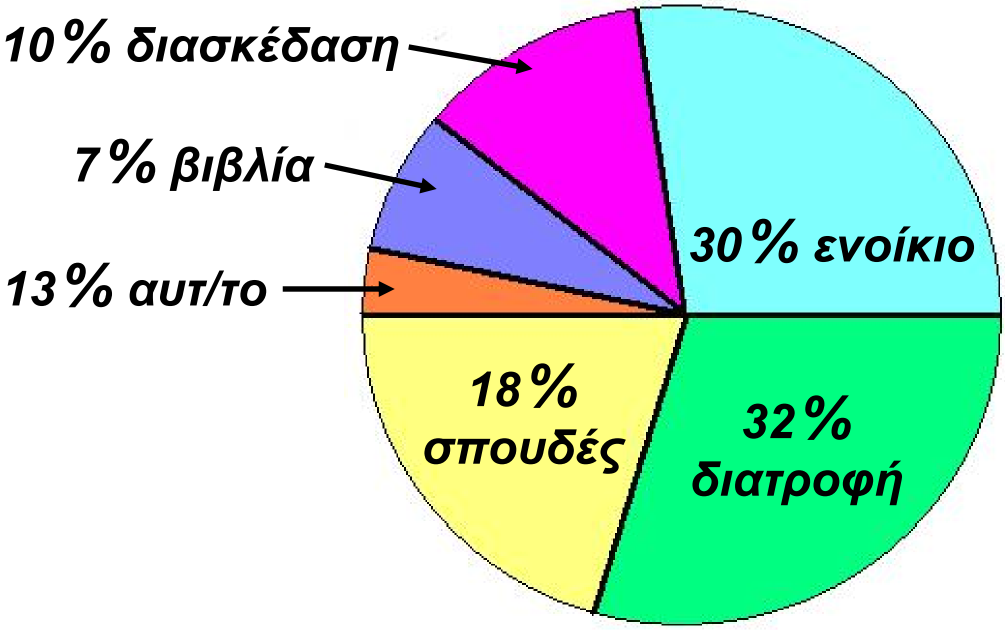
6. Ένα μπουκάλι με οινόπνευμα παρέμεινε ανοικτό και εξατμίσθηκε το 22% του όγκου του. Το μπουκάλι περιείχε αρχικά 0,610 lt. Πόσα lt οινοπνεύματος εξατμίστηκαν;

7. Σε ένα σημείο της γήινης σφαίρας, ο φλοιός έχει πάχος 50 Km, ο μανδύας 2.900 Km και ο πυρήνας 3.450 Km. (α) Να βρεις το μήκος της ακτίνας της Γης σε Km. (β) Να βρεις ποιο ποσοστό της ακτίνας της Γης κατέχει ο φλοιός, ο μανδύας και ο πυρήνας αντίστοιχα.



8. Μια οικογένεια έχει μηνιαία έσοδα 1.200 €. Το 10% των εσόδων αποταμιεύονται και τα υπόλοιπα ξοδεύονται όπως δείχνει το κυκλικό διάγραμμα στην επόμενη σελίδα,
(α) Να υπολογίσεις πόσα χρήματα ξοδεύει η οικογένεια σε κάθε κατηγορία δαπανών,

(β) Τι ποσοστό μηνιαίων εσόδων της αποτελεί κάθε μία κατηγορία δαπανών;



Α.5.2 Προβλήματα με ποσοστά

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ένας ηλεκτρολόγος είχε έσοδα 2.856 € το δεύτερο τρίμηνο του έτους. Πόσα χρήματα πρέπει να αποδώσει στο κράτος, αν ο ΦΠΑ που παρακρατά από τους πελάτες του είναι 19%;

Λύση

Το ποσό Φ.Π.Α. έχει παρακρατηθεί από τον ηλεκτρολόγο, αφού κάθε πελάτης του έχει επιβαρυνθεί με 19%, επί της αξίας της εργασίας του ηλεκτρολόγου. Έτσι για εργασία 100 € ο πελάτης έχει πληρώσει 119 €, δηλαδή ο ηλεκτρολόγος σε έσοδα 119 € οφείλει στο κράτος 19 €, δηλαδή τα $\frac{19}{119}$ των εσόδων.

$$\text{Οφειλόμενος ΦΠΑ} = \text{Έσοδα} \cdot \frac{19}{119} = 2856 \cdot \frac{19}{100} = 456 \text{ €}$$

2. Στην περίοδο των εκπτώσεων, ένα κατάστημα έκανε έκπτωση 35% στα είδη ρουχισμού και 15% στα παπούτσια. Ποσό θα πληρώσουμε για ένα πουκάμισο και ένα ζευγάρι παπούτσια που κόστιζαν 58 € και 170 €, αντίστοιχα, πριν τις εκπτώσεις.

Λύση

Η τιμή κάθε είδους υπολογίζεται από τη σχέση:
Τιμή μετά την έκπτωση =
Τιμή πριν την έκπτωση – Ποσό έκπτωσης.

Για το πουκάμισο έχουμε ποσό έκπτωσης:

$$35\% \cdot 58 \text{ €} = \frac{35}{100} \cdot 58 \text{ €} = 20{,}30 \text{ €}.$$

Η τιμή του πουκάμισου μετά την έκπτωση είναι:
58 € – 20,30 € = 37,70 €.

Για τα παπούτσια έχουμε ποσό έκπτωσης:

$$15\% \cdot 170\text{ €} = \frac{15}{100} \cdot 170\text{ €} = 25{,}50\text{ €}.$$

Η τιμή των παπουτσιών μετά την έκπτωση είναι:
170 € – 25,50 € = 144,50 €.

Και για τα δύο μαζί θα πληρώσουμε:
37,70 € + 144,50 € = 182,20 €.

3. Ποσό 1.000 € κατατέθηκε σε λογαριασμό ταμιευτηρίου, με επιτόκιο 5%. Πόσος είναι ο τόκος που θα αποδώσει το κεφάλαιο αυτό, μετά από 18 μήνες, αν οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο κάθε χρόνο;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι: ***Τόκος = Κεφάλαιο · Επιτόκιο***

Άρα: Τόκος α΄ έτους είναι:

$$1000\text{ €} \cdot 5\% = 1.000\text{ €} \cdot \frac{5}{100} = 50\text{ €}$$

Στο τέλος των 12 μηνών το κεφάλαιο θα γίνει:
1000 € + 50 € = 1050 €

Ο τόκος στους επόμενους 6 μήνες θα είναι τα $\frac{6}{12}$ του ετήσιου τόκου, δηλαδή: $1050\text{ €} \cdot 5\% \cdot \frac{6}{12} =$

$$1.050\text{ €} \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{6}{12} = 26{,}25\text{ €}$$

Ο συνολικός τόκος που απέδωσαν τα 1.000 € για 18 μήνες είναι: ***50 € + 26,25 € = 76,25 €.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Επιχειρηματίας αγόρασε μετοχές μιας εταιρείας, προς 50 € την κάθε μετοχή. Σε ένα μήνα η μετοχή έπεσε κατά 8% και το επόμενο δίμηνο ανέβηκε κατά 5% το μήνα. (α) Ποια ήταν η τιμή της μετοχής στο τέλος του τρίτου μήνα; (β) Η επένδυση του επιχειρηματία ήταν κερδοφόρα ή όχι; (γ) Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους ή ζημίας του, επί του αρχικού κεφαλαίου;*

***2.** Κεφάλαιο 80.000 € κατατέθηκε, σε λογαριασμό ταμιευτηρίου, με επιτόκιο 4,5% το χρόνο. (α) Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του πρώτου έτους; (β) Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του δεύτερου έτους, αν ο τόκος του πρώτου έτους κεφαλοποιηθεί;*

***3.** Ένα καινούριο αυτοκίνητο κόστιζε 20.000 €. Το αγόρασε κάποιος και μετά από 1 χρόνο ήθελε να το πουλήσει, κατά 30% λιγότερο, από όσο το αγόρασε. Ο υποψήφιος αγοραστής έμαθε, ότι το ίδιο ακριβώς μοντέλο, καινούριο, κόστιζε 25.000 €. (α) Σε ποια τιμή θα αγόραζε το μεταχειρισμένο αυτοκίνητο; (β) Τι ποσοστό της τιμής του καινούριου αυτοκινήτου είναι η τιμή του μεταχειρισμένου; (γ) Αν ένα μαγαζί που πουλάει μεταχειρισμένα αυτοκίνητα δίνει το ίδιο μοντέλο σε τιμή 40% φτηνότερα από την τρέχουσα τιμή του καινούριου, από ποιον συμφέρει να αγοράσει το μεταχειρισμένο αυτοκίνητο ο υποψήφιος αγοραστής;*

***4.** Σε ένα προϊόν, έγινε η προσφορά που φαίνεται στην παρακάτω πινακίδα. Στη συσκευασία του προϊόντος υπήρχε σημειωμένη η συγκεκριμένη, για το είδος προσφορά, δηλαδή για κάθε 300 κ.εκ., πρόσθετα άλλα*

100 κ.εκ. (α) Σύμφωνα, με όσα διαβάζεις, θεωρείς ότι αληθεύουν όσα γράφονται στην προσφορά; (β) Σε ποια περίπτωση η εταιρεία θα πρόσφερε, πράγματι, το 50% του προϊόντος ΔΩΡΕΑΝ;

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟ ΠΡΟΪΟΝ 50% ΔΩΡΕΑΝ

5. Τι κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε στην τράπεζα, για να πάρουμε στο τέλος ενός έτους 1.000 €, αν το επιτόκιο είναι 2%;

6. Τα βασικά τέλη διμήνου για λογαριασμό του ΟΤΕ είναι 22 € και η χρέωση για κάθε μονάδα 0,07 €. Να βρεις πόσο θα πληρώσει ένας συνδρομη-τής, αν έχει κάνει 1.500 μονάδες συνδιαλέξεων και επί του συνόλου υπολογίζεται ΦΠΑ 19%.

7. Ένας έμπορος αγόρασε διάφορα εμπορεύματα συνολικής αξίας 30.000 €. Πλήρωσε τοις μετρητοίς το 40% και τα υπόλοιπα με συναλλαγματικές, σε 4 μη-νιαίες δόσεις με τόκο 1% τον μήνα. Να υπολογίσεις: (α) Το συνολικό ποσό της επιβάρυνσης από τους τόκους που θα πληρώσει. (β) Το ποσοστό της επιβάρυνσης αυτής, επί της αρχικής αξίας των εμπορευμάτων.

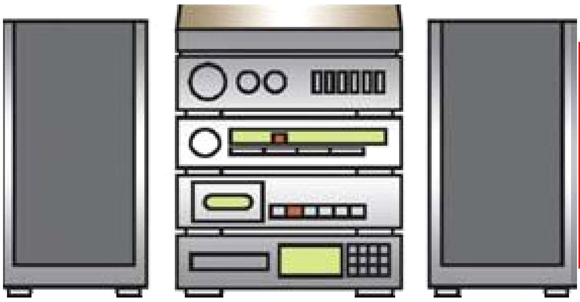
8. Ένας τεχνικός είχε έσοδα σε ένα τρίμηνο 8.330 €. Πόσο ΦΠΑ (19%) πρέπει να αποδώσει στην εφορία;

9. Ένα ψυγείο κοστίζει, τοις μετρητοίς, 1.200 € χωρίς το ΦΠΑ 19%. Κάποιος το αγόρασε με 50% προκαταβολή και το υπόλοιπο, σε 6 μηνιαίες δόσεις με τόκο 3% το

μήνα. (α) Να υπολογίσεις πόσα χρήματα έδωσε, ως προκαταβολή, αν μαζί με αυτήν κατέβαλε και ολόκληρο το ποσό του ΦΠΑ. (β) Ποιο ήταν το ποσό της κάθε δόσης; (γ) Πόσο του στοίχισε συνολικά το ψυγείο;

10. *Για τη παρακάτω διαφήμιση: (α) Πόσο είναι το ΦΠΑ που πρέπει να πληρώσουμε; (β) Πόσο θα στοιχίσει το ραδιοκασετόφωνο, αν το αγοράσουμε με δόσεις; (γ) Αν το τραπεζικό επιτόκιο είναι 10%, ποια επιλογή αγοράς μας συμφέρει, με την προϋπόθεση, ότι έχουμε όλο το απαιτούμενο ποσό σε λογαριασμό ταμιευτηρίου;*

χωρίς ΦΠΑ



ΜΕΤΡΗΤΟΙΣ
350 € ή
16 μηνιαίες
δόσεις με 30 €

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Να μελετήσεις τα εκλογικά αποτελέσματα στις τέσσερις τελευταίες εκλογές στη χώρα μας και υπολόγισε για κάθε μια από αυτές:
(α) τα ποσοστά των ψηφισάντων, (β) τα ποσοστά των έγκυρων ψηφοδελτίων, των άκυρων και των λευκών και (γ) των ποσοστών που έλαβε κάθε κόμμα και

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος

1. Το 30% του x ισούται με το 90% του $\frac{x}{3}$

2. Σε ένα βιβλίο έγινε αύξηση τιμής κατά 5% και δεύτερη αύξηση κατά 10% επί της νέας τιμής. Η συνολική αύξηση ήταν 15,5%.

3. Όταν σ' ένα προϊόν αξίας 700 € η έκπτωση είναι 200 €, το ποσοστό έκπτωσης είναι περίπου 28,5%.

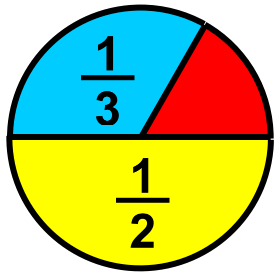
4. Το 20% του 50 είναι 10.

5. 1 € έκπτωση σ' ένα στυλό που κοστίζει 4 € αντιστοιχεί σε ποσοστό έκπτωσης 25%.

6. Ένα είδος μετά από έκπτωση 200 €, κοστίζει 100 €. Στο είδος έγινε έκπτωση 25%.

7. Ο πληθυσμός μιας κωμόπολης ήταν 3.000 κάτοικοι και αυξήθηκε σε 6.000 κατοίκους. Λέμε ότι ο πληθυσμός αυξήθηκε κατά 100%.

8. Το κόκκινο μέρος του κύκλου είναι το 15%



9. *Μια τάξη έχει 28 μαθητές και μια μέρα απουσίαζαν οι 4, δηλαδή απουσίαζε το 15% της τάξης.*

10. *Το 30% της ώρας είναι 25 λεπτά.*

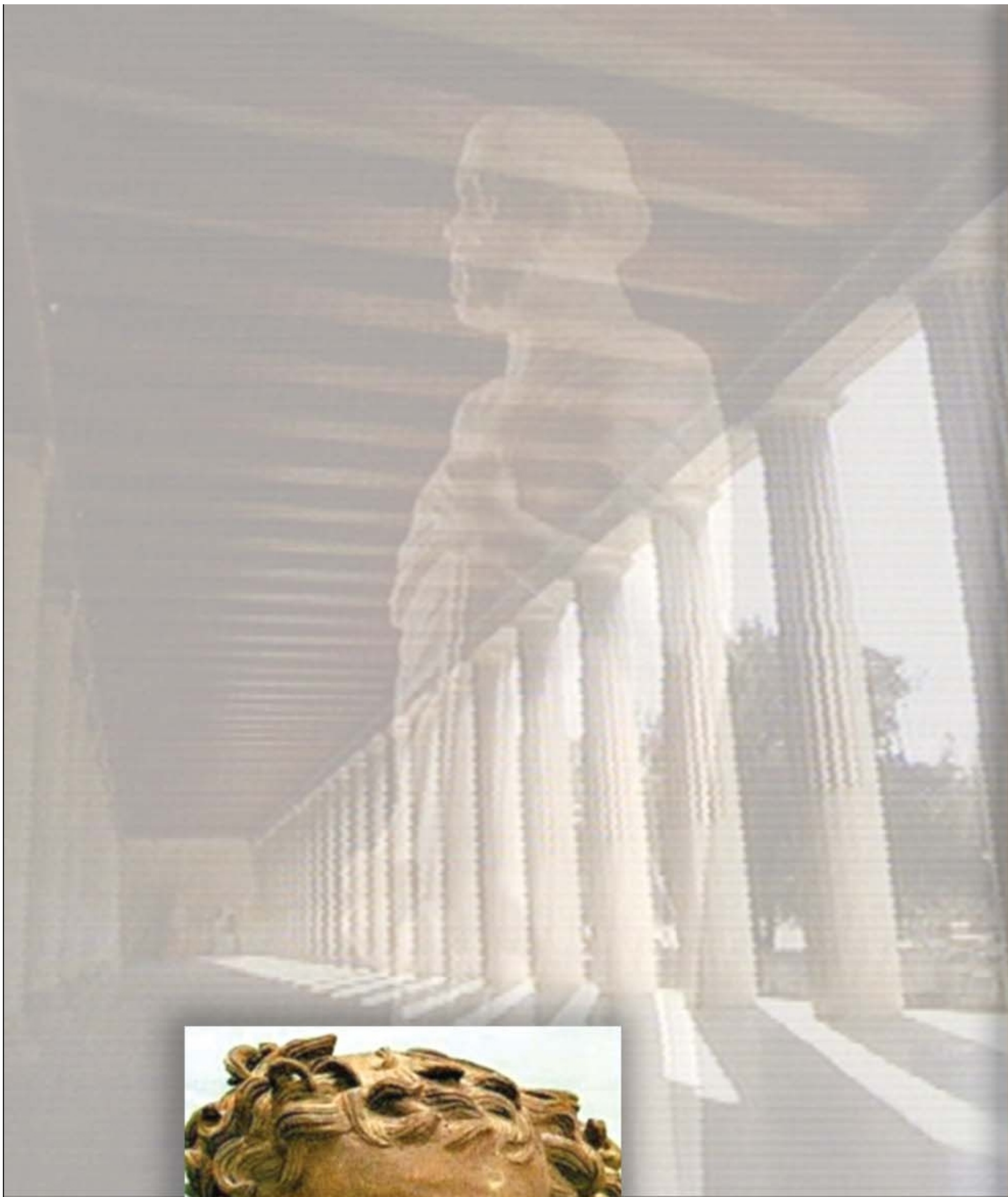
11. *Μια αύξηση πληθυσμού από 5.000 στις 10.000 είναι μια αύξηση 100%*

12. *Μια αύξηση 100 € σε ένα είδος που κόστιζε 400 € είναι μια αύξηση 15%*

Β. Ασκήσεις Αντιστοίχισης

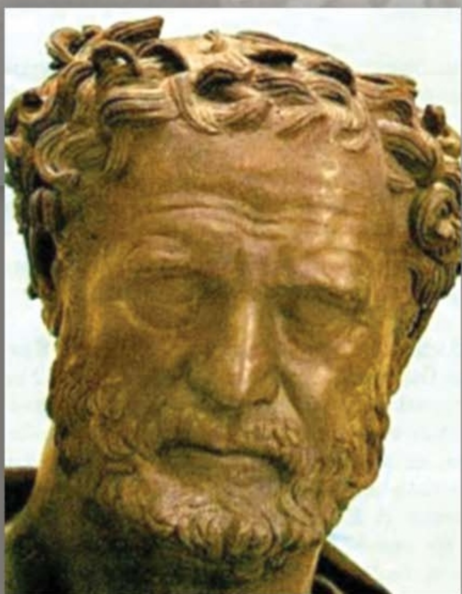
Σε κάθε μία από τις νέες τιμές των προϊόντων που αναφέρονται στην διαφήμιση, να αντιστοιχίσεις το ποσοστό έκπτωσης.

ΠΡΟΣΦΟΡΕΣ	Παντελόνι	~~120€~~	84€	10%
	Φούστες	~~80€~~	48€	15%
	Φορέματα	~~180€~~	153€	20%
	Μπλούζες	~~40€~~	32€	30%
	Φόρμες	~~50€~~	45€	40%



ΜΕΡΟΣ Α΄

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ Ο ΑΒΔΗΡΙΤΗΣ
(460 – 370 π.Χ.)

Ανάλογα ποσά & αντιστρόφως ανάλογα ποσά

6.1 Παράσταση σημείων στο επίπεδο

- ***Σχεδιάζω ένα σύστημα ημιαξόνων***
- ***Βρίσκω τις συντεταγμένες ενός σημείου***
- ***Βρίσκω ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του***

6.2 Λόγος δύο αριθμών - Αναλογία

- ***Κατανοώ την έννοια του λόγου και την έννοια της αναλογίας***
- ***Επιλύω εξισώσεις της μορφής αx = β, μέσω αναζήτησης της τέταρτης αναλόγου της σχέσης*** $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{x}$ ***. Γνωρίζω, ότι γενικά είναι*** $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} \neq \frac{\alpha}{\beta}$

6.3 Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

- ***Αναγνωρίζω αν υπάρχει αναλογία στη μεταβολή δύο μεγεθών***
- ***Συμπληρώνω πίνακες αναλόγων ποσών όταν δίνεται ο λόγος τους***
- ***Υπολογίζω το λόγο των δύο αναλόγων ποσών όταν δίνονται οι πίνακές τους***
- ***Χρησιμοποιώ το ποσοστό ως ειδική περίπτωση συντελεστή αναλογίας***

6.4 Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

- ***Αναπαριστάνω γραφικά μία σχέση αναλογίας***
- ***Διαπιστώνω ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται σε μια ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων***

6.5 Προβλήματα αναλογιών

- ***Οργανώνω τα δεδομένα ενός προβλήματος αναλογιών σε πίνακα και κατασκευάζω με βάση τον πίνακα αυτόν, όπου κρίνεται απαραίτητο, και την γραφική παράσταση***
- ***Λύνω τα προβλήματα εφαρμόζοντας, όπου κρίνεται απαραίτητο, τις ιδιότητες των αναλόγων ποσών σε δύο πλαίσια: αριθμητικό και γραφικό***

6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

- ***Διακρίνω εάν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα***
- ***Γνωρίζω ότι το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι σταθερό***
- ***Κατασκευάζω πίνακες αντίστοιχων τιμών αντιστρόφως αναλόγων ποσών***
- ***Παριστάνω με σημεία ενός συστήματος αξόνων τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών και χαράζω την καμπύλη που περνά από αυτά***
- ***Λύνω προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αντιστρόφως αναλόγων ποσών***

Η «ρητή εντολή»

- ***Τι είναι τούτα, τα περίεργα στην οθόνη σας κύριε Πέτρο:*** ρώτησαν το μεσόκοπο άντρα που δούλευε απορροφημένος στον υπολογιστή του. Εκείνος σήκωσε τα μάτια και κοίταξε πάνω απ' τα γυαλιά τα παιδιά που μπήκαν χαρούμενα στο γραφείο του.

- ***Ο μπαμπάς μας είπε να τον περιμένουμε εδώ,*** δικαιολόγησαν την παρουσία τους κοιτώντας με περιέργεια τον υπολογιστή.

- ***Θα ξέρετε παιδιά,*** είπε ο κύριος Πέτρος, ***ότι ο πατέρας σας σχεδιάζει στον υπολογιστή τα κτίρια που κατασκευάζουμε. Εγώ έχω την τεχνική υποστήριξη αυτών των προγραμμάτων. Αυτά που βλέπετε όμως στην οθόνη είναι μια απλή οικονομική μελέτη για την κατασκευή. Αν είχατε μάθει στο σχολείο τους ακέραιους και τους ρητούς εύκολα θα καταλαβαίνατε όλα τούτα».***

- ***Ξέρω τους ακέραιους,*** είπε ο Ιάσονας. ***Είναι οι αριθμοί που περιέχουν μόνο ακέραιές μονάδες, δηλαδή δεν είναι κλάσματα. Αλλά οι ρητοί τι είναι: Γιατί τους λέμε έτσι:***

- ***Πριν προσπαθήσω να σας εξηγήσω, ας δούμε τι αναφέρει και το λεξικό,*** είπε ο κύριος Πέτρος. Συμβουλεύτηκε ένα χοντρό βιβλίο από τη βιβλιοθήκη και συνέχισε: ***«Ρητός είναι ο αριθμός που μπορούμε να τον πούμε. Η λέξη προέρχεται από το αρχαίο "είρηκα" δηλαδή έχω πει που είναι παρακείμενος του "λέγω". Άρα ρητός είναι ο ειπωμένος αριθμός.***

Τα γεμάτα απορία μάτια των παιδιών τον έκαναν να συνεχίσει: ***«Εκτός από τους ρητούς που είναι οι ακέραιοι και τα γνωστά κλάσματα, υπάρχουν και αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, που δεν μπορείς να τους πεις ολόκληρους αφού τα ψηφία τους δεν τελειώνουν ποτέ και ούτε είναι γνωστά. Αυτούς τους αριθμούς τους ονομάζουμε άρρητους και θα τους μάθετε αργότερα στο σχολείο».***

Κοίταξε πάλι το λεξικό και συνέχισε κάπως σκεπτικός. ***«Ομολογώ ότι δεν ήξερα από που προέρχεται η λέξη ρητός, ενώ γνωρίζω το "ρήτορας" ή την έκφραση "ρητή εντολή". Και να σκεφτεί κανείς ότι τόσα χρόνια την αναφέρω στα μαθηματικά...»***

- ***Συγνώμη, μηχανικός υπολογιστών δεν είστε;*** ρώτησε με αφοπλιστική αφέλεια ο Ισονας.

- ***Ναι, με ειδίκευση στο λογισμικό, που προϋποθέτει όμως καλή γνώση μαθηματικών. Σου φαίνεται κάτι περίεργο;*** απόρησε ο κύριος Πέτρος.

- ***Όχι βέβαια,*** βιάστηκε να διορθώσει ο Ιάσονας, ***αλλά περίμενα ότι θα ψάχνατε τη λέξη στο ηλεκτρονικό λεξικό.***

Ο κύριος Πέτρος χαμογέλασε με την παρατήρηση του Ιάσονα κι ύστερα με πιο σοβαρό ύφος είπε, δείχνοντας τον υπολογιστή:

- Ακούστε παιδιά. Γίνεται συχνά μια παρεξήγηση με τούτο το μηχάνημα Άλλοι το αποφεύγουν γιατί δεν ξέρουν να το χειρίζονται και άλλοι το χρησιμοποιούν περίπου σαν τηλεόραση. Και τα δύο είναι λάθος. Στον υπολογιστή έχω ηλεκτρονικό λεξικό, αυτό όμως δε σημαίνει ότι θα πάψω να συμβουλεύομαι το βιβλίο. Προτιμώ να χρησιμοποιώ τον υπολογιστή σε ποιο σύνθετες και πιο δημιουργικές εργασίες. Για

παράδειγμα θα ήταν σωστό να τον χρησιμοποιήσεις για να σχεδιάσεις ένα στάδιο, αλλά θεωρώ ότι είναι λάθος να παίζεις ποδόσφαιρο στην οθόνη τον υπολογιστή. Το μηχάνημα αυτό δε φτιάχτηκε για να καταργήσει τις δικές μας λειτουργίες, αλλά για να βελτιώσει τη δημιουργική μας σκέψη». **Τη συζήτηση διέκοψε ο πατέρας των παιδιών που μπήκε βιαστικά και έδωσε ένα σχέδιο στον κύριο Πέτρο λέγοντας:** ***«Στο διάγραμμα που θα σχεδιάσεις να φαίνεται καθαρά ότι το κόστος είναι ανάλογο με το εμβαδόν».***

- Τι σημαίνει "ανάλογο" κύριε Πέτρο; **ρώτησε απορημένα η Αθηνά. Εκείνος χωρίς να απαντήσει απευθύνθηκε μειδιώντας στον πατέρα τους.**

- Σου δίνω "ρητή εντολή", να φέρνεις πιο συχνά τα παιδιά στο γραφείο. Πάντα κάτι θα μαθαίνουμε από τις ερωτήσεις τους.

Α.6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο

Στα προηγούμενα τοποθετήσαμε τους φυσικούς αριθμούς πάνω σε μια ευθεία. Τώρα θα ανοίξουμε λίγο τον ορίζοντά μας και από την ευθεία πάμε στο επίπεδο. Είναι εύκολο. Αρκεί να πάρουμε δύο κάθετες ευθείες και έχουμε μπροστά μας ένα επίπεδο που έχει πολλά να μας δείξει. Ας τα δούμε ξεκινώντας με μια παρτίδα σκάκι.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε μια εφημερίδα δημοσιεύτηκε μια παρτίδα σκάκι, όπως είναι αυτή που φαίνεται στη παρακάτω σκακιέρα.

- ***Δώσε ονομασίες για τις θέσεις των πιονιών που βρίσκονται στη συγκεκριμένη σκακιέρα και φτιάξε ένα πίνακα με αυτές.***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Η θερμοκρασία ενός ασθενούς κατά την τρίτη ημέρα νοσηλείας του, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

7:30	9:00	10:00	11:00	12:30	13:30
37,2	37,7	37,9	38,6	39,2	38,2

14:30	16:00	18:00	20:00	21:30	23:00
37,2	37	36,6	37,8	38,2	37,1

➢ ***Μπορείς να παραστήσεις αυτόν τον πίνακα με έναν άλλο τρόπο;***

➢ ***Πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας του ασθενούς τις ώρες που δεν μετριέται αυτή;***

Μαθαίνουμε

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο: Σχεδιάζουμε δύο κάθετες μεταξύ τους ημιευθείες **Οx** και **Οy**. Πάνω σε κάθε μια απ' αυτές ορίζουμε την ίδια μονάδα μέτρησης. Αυτές οι ημιευθείες αποτελούν ένα σύστημα ημιαξόνων.

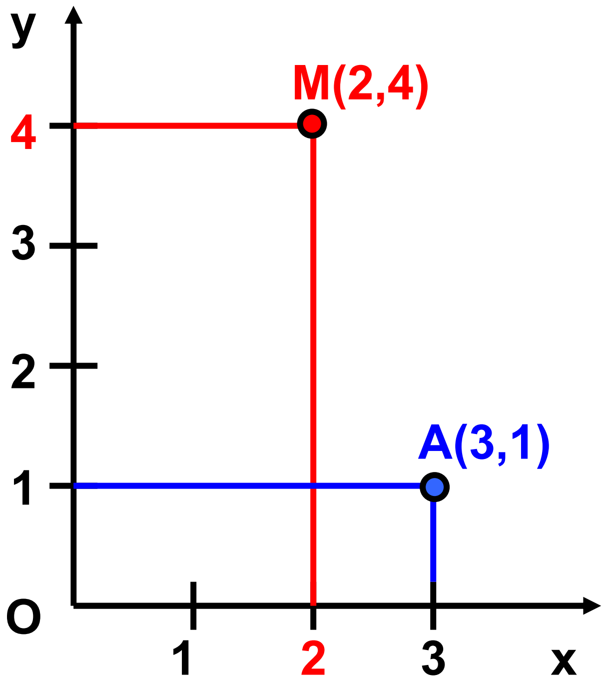
• Ο **ημιάξονας Οx** λέγεται ημιάξονας των **τετμημένων** ή **ημιάξονας των x.**

• Ο **ημιάξονας Οy** λέγεται ημιάξονας των **τεταγμένων** ή **ημιάξονας των y.**

• Το **σημείο Ο** ονομάζεται **αρχή των ημιαξόνων**

◆ Το **3** είναι η **τετμημένη** του σημείου **Α**

◆ Το **1** είναι η **τεταγμένη** του σημείου **Α**



• Η **τετμημένη** και η **τεταγμένη** του σημείου **Α** ονομάζονται **συντεταγμένες του Α** και συνήθως όταν θέλουμε να αναφερθούμε στο σημείο **Α**, γράφουμε **Α(3,1)**.

• Το ζεύγος **(3,1)** του οποίου ο πρώτος αριθμός 3 είναι η **τετμημένη** του σημείου Α και ο δεύτερος αριθμός 1 είναι η **τεταγμένη** του σημείου Α, λέγεται **διατεταγμένο ζεύγος**, επειδή έχει σημασία η διάταξη, δηλαδή η σειρά, με την οποία γράφονται οι αριθμοί που το αποτελούν.

◆ Με το σύστημα αυτό αντιστοιχούμε σε κάθε σημείο Α ένα ζεύγος αριθμών **(3,1)**, δηλαδή ένα **διατεταγμένο ζεύγος**, οι αριθμοί του οποίου ονομάζονται **συντεταγμένες του σημείου.**

◆ Αντίστροφα, κάθε **διατεταγμένο ζεύγος** θετικών αριθμών π.χ. το **(2,4)** αντιστοιχεί σε ένα σημείο **Μ** του επιπέδου.

• Το σύστημα ημιαξόνων που χρησιμοποιήσαμε λέγεται **ορθοκανονικό**, γιατί οι ημιάξονες τέμνονται κάθετα **(ορθο-)** και έχουμε ορίσει πάνω τους την ίδια μονάδα μέτρησης **(-κανονικό)**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Να σχεδιάσεις ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων, με μονάδα το 1 cm και να τοποθετήσεις τα σημεία Α(2,3), Β(3,2), Γ(4,5), Δ(5,5), Ε(1,4), Ζ(7,3), Η(7,2), Θ(6,2), 1(6,0), Κ(0,5). Τι παρατηρείς για τα σημεία Ι και Κ; Πού βρίσκονται αυτά; Μπορείς να γενικεύσεις τις παρατηρήσεις σου για τα σημεία που έχουν τετμημένη ή τεταγμένη το μηδέν;*

***2.** Σε ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων να τοποθετήσεις τα σημεία Α(2,1), Β(1,2), Γ(2,3) και Δ(3,2). Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΑ; Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Κ, ποιες είναι οι συντεταγμένες του;*

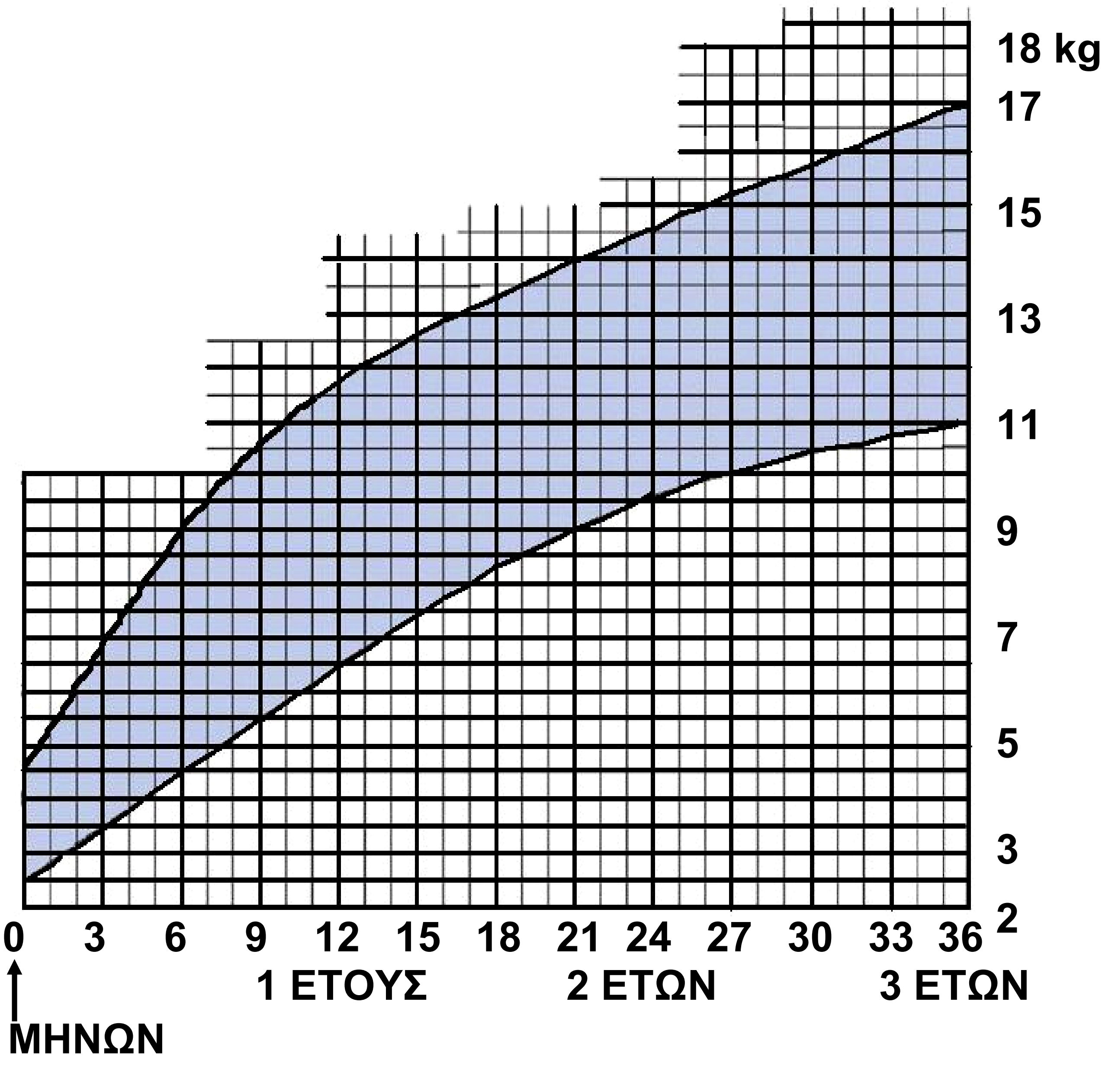
3. Γράψε πέντε διατεταγμένα ζεύγη σημείων, των οποίων η τετμημένη τους είναι ίση με την τεταγμένη τους. Μπορείς να τα τοποθετήσεις, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων; Τι παρατηρείς;

4. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τμήμα ενός πίνακα απουσιών ανά τρίμηνο, για τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ενός σχολείου. Κάθε θέση του πίνακα ορίζεται από το ζεύγος (γράμμα στήλης, αριθμός γραμμής).
(α) Σε ποια θέση βρίσκεται το όνομα του μαθητή Γεωργίου; (β) Τι αντιπροσωπεύει ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση C8; (γ) Ποιος αριθμός πρέπει να γραφεί στη θέση D12 και ποιος στη θέση E13;

	A	B	C	D	E
1	Τάξη Α΄ Γυμνασίου				
2	Πίνακας Απουσιών Μαθητών				
3	Τρίμηνο	Είδος Απουσιών			
4		Δ = Δικαιο-λογημένες	ΑΝΤΩ-ΝΙΟΥ	ΒΕΛΛΙΟΥ	ΓΕΩΡΓΙΟΥ
5		Α = Αδικαι-ολόγητες			
6	1ο	Α	10	0	3
7		Δ	6	8	20
8	2ο	Α	0	6	12
9		Δ	5	6	4
10	3ο	Α	3	0	19
11		Δ	18	2	3
12	Σύνο-λο	Α			
13		Δ			

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Σε κάθε βιβλιάριο υγείας παιδιού, που παρέχει το Υπουργείο Υγείας και Πρόνοιας, υπάρχει το παρακάτω διάγραμμα, το οποίο παριστάνει την καμπύλη αύξησης του βάρους των βρεφών από 0 έως 3 ετών. Παρατήρησέ το προσεκτικά και απάντησε στα παρακάτω ερωτήματα:



(α) Ποιο είναι το μικρότερο και ποιο το μεγαλύτερο φυσιολογικό βάρος ενός βρέφους ηλικίας 15 μηνών;

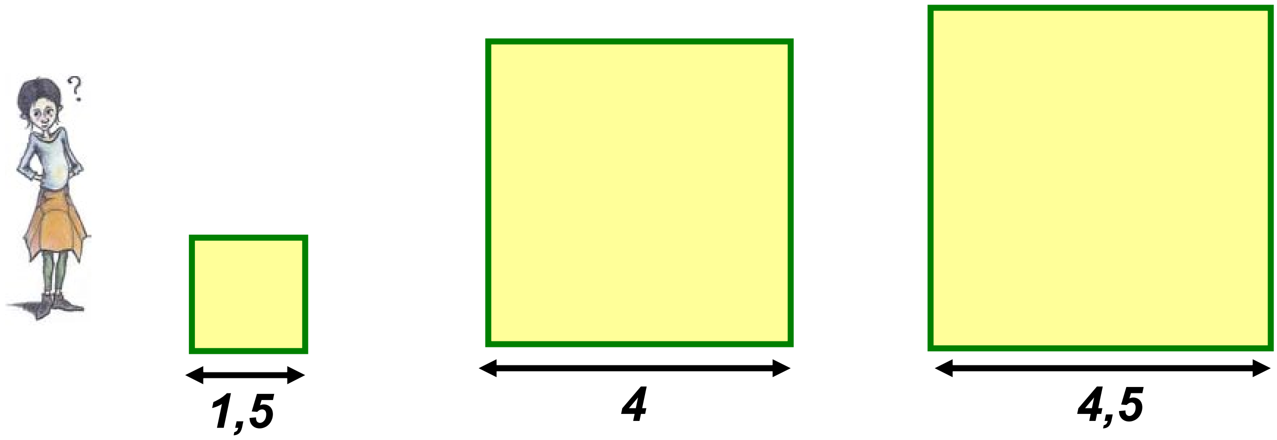
(β) Πάνω από ποιο βάρος θεωρείται υπέρβαρο ένα βρέφος ηλικίας 18 μηνών και κάτω από ποιο βάρος θεωρείται λιποβαρές;

(γ) Είναι φυσιολογικό το βάρος των 7,5 κιλών για ένα βρέφος 9 μηνών;

Α.6.2. Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Έχουμε τα παρακάτω τρία τετράγωνα:



- ***Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:***

Πλευρά τετραγώνου	**1,5 cm**	**4 cm**	**4,5 cm**
Περίμετρος τετραγώνου			

- ***Εξήγησε πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης σειράς.***
- ***Βρες για κάθε τετράγωνο το κλάσμα πλευρά προς περίμετρο.***
- ***Ποιο είναι το συμπέρασμα που βγάζεις;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

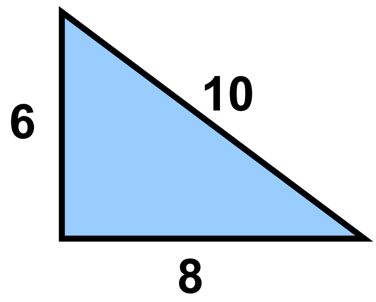
Χρησιμοποιούμε τη φωτογραφική μηχανή για να απεικονίσουμε εικόνες αντικειμένων. Οι εικόνες αυτές δείχνουν τα πραγματικά αντικείμενα σε σμίκρυνση.

Στη φωτογραφία το ύψος ενός παιδιού είναι 2 cm ενώ γνωρίζουμε ότι το πραγματικό του ύψος είναι 1,65 m = 165 cm.

- ***Πόση θα είναι τότε η σμίκρυνσή του στη φωτογραφία;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Σχεδίασε το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος και μετά σχεδίασέ το μεγεθυσμένο, ώστε η πλευρά μήκους 8 cm να έχει νέο μήκος 12 cm.

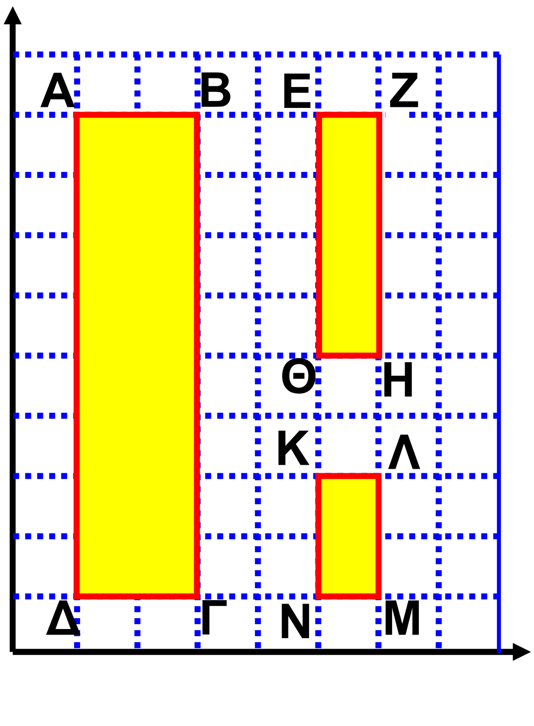


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Σύγκρινε τους λόγους:

$\frac{AB}{K\Lambda}$ και $\frac{B\Gamma}{\Lambda M}$. Τι παρατηρείς;

- ***Τι συμπέρασμα βγάζεις για το λόγο των περιμέτρων των ορθογώνιων παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ.***



Μετά σύγκρινε τους λόγους: $\frac{AB}{EZ}$ και $\frac{B\Gamma}{ZH}$.
Τι παρατηρείς;

➢ *Τι συμπέρασμα βγάζεις για το λόγο των περιμέτρων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.*

Μαθαίνουμε

• Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι το πηλίκο των μέτρων τους.

• **Η ισότητα λόγων** ονομάζεται **αναλογία.**

• Δύο σχήματα λέγονται **όμοια** όταν το ένα αποτελεί **σμίκρυνση ή μεγέθυνση** του άλλου.

• **Ο λόγος της απόστασης** δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου **προς την πραγματική απόσταση** των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου, ονομάζεται **κλίμακα.**

► Αν οι λόγοι των αντιστοίχων πλευρών δύο παραλληλογράμμων είναι ίσοι, τότε αυτοί θα είναι ίσοι και με το λόγο των περιμέτρων τους.

► Κάθε σχέση αναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μετρούμε μια απόσταση, σε χάρτη, με κλίμακα 1:10.000.000 και τη βρίσκουμε ίση με 2,4 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση των δύο σημείων;

Λύση

Αφού δίνεται η κλίμακα 1:10.000.000, στο 1 cm του χάρτη αντιστοιχούν 10.000.000 cm στην πραγματικότητα. Συνεπώς, αν τα 2,4 cm του χάρτη αντιστοιχούν σε x cm στην πραγματικότητα θα έχουμε: $\frac{2{,}4}{x} = \frac{1}{10.000.000}$

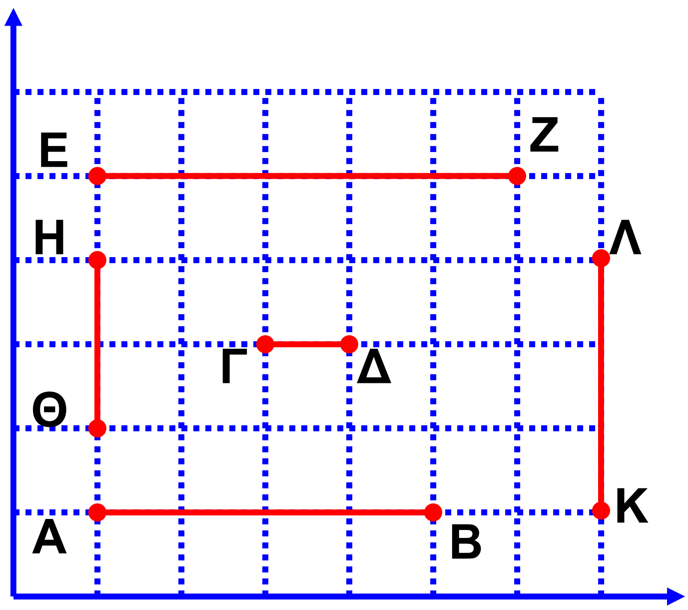
Επομένως ισχύει ότι: $1 \cdot x = 2{,}4 \cdot 10.000.000$ ή
$x = 24.000.000$ cm $= 240.000$ m $= 240$ Km.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

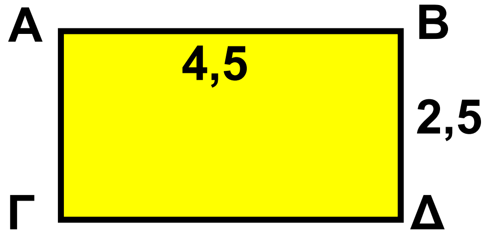
***1.** Να βρεις τους λόγους των διαφόρων ευθύγραμμων τμημάτων που είναι στο σχέδιο.*

(α) $\frac{AB}{\Gamma\Delta}, \frac{EZ}{H\Theta}, \frac{K\Lambda}{AB}, \frac{AB}{K\Lambda}, \frac{H\Theta}{EZ}, \frac{\Gamma\Delta}{AB}$

(β) $\frac{\Gamma\Delta}{EZ}, \frac{H\Theta}{K\Lambda}, \frac{AB}{AB}, \frac{EZ}{\Gamma\Delta}, \frac{K\Lambda}{H\Theta}, \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}$



2. ***Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος. Να σχεδιάσεις ένα άλλο ορθογώνιο με πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ορθογωνίου αυτού, έτσι ώστε ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών τους να είναι: 2:1.***



3. ***Σε μια φωτογραφία το ύψος ενός ανθρώπου είναι 4 cm, ενώ το πραγματικό το ύψος είναι 1,76 m. Πόσο έχουν σμικρυνθεί όλα τα αντικείμενα της φωτογραφίας;***

4. ***Ένας προβολέας διαφανειών προβάλλει το κείμενο μιας διαφάνειας στον απέναντι τοίχο. Αν ένα "Α" έχει ύψος 7 mm στη διαφάνεια και 4,2 cm στον τοίχο, ποια είναι η μεγέθυνση που δίνει ο προβολέας;***

5. ***Η σύνθεση μιας μπλούζας είναι 80% βαμβάκι και το υπόλοιπο πολυεστέρας. Αν η μπλούζα ζυγίζει 820 gr, πόσα γραμμάρια ζυγίζουν τα νήματα του πολυεστέρα που περιέχει;***

6. ***Να συμπληρώσεις τον πίνακα:***

Κλίμακα	*Μήκος σε σχέδιο*	*Πραγματικό μήκος*
1 : 5	4 cm	
3 : 8		24 cm
1 : 30	12 cm	
	2 cm	10 cm
1 : 100	3,5 cm	

7. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι x + 2 και x. (α) Να γράψεις τη σχέση που συνδέει την περίμετρο Π του ορθογωνίου με το x.
(β) Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

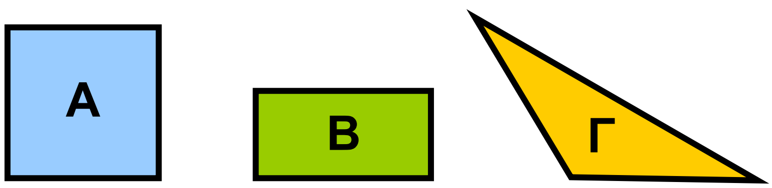
x		2		4
Π	8		16	

8. Αν οι διαστάσεις ενός δωματίου, σε ένα σχέδιο με κλίμακα 1 : 250, είναι 3 x 5, οι πραγματικές διαστάσεις του δωματίου θα είναι ….. x …. .

9. Αν ανακατέψουμε 2 κιλά κόκκινο χρώμα και 3 κιλά κίτρινο χρώμα, φτιάχνουμε μια συγκεκριμένη απόχρωση του πορτοκαλί. Αν ανακατέψεις 5 κιλά κόκκινο χρώμα και 6 κιλά κίτρινο, θα πάρεις την ίδια απόχρωση; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

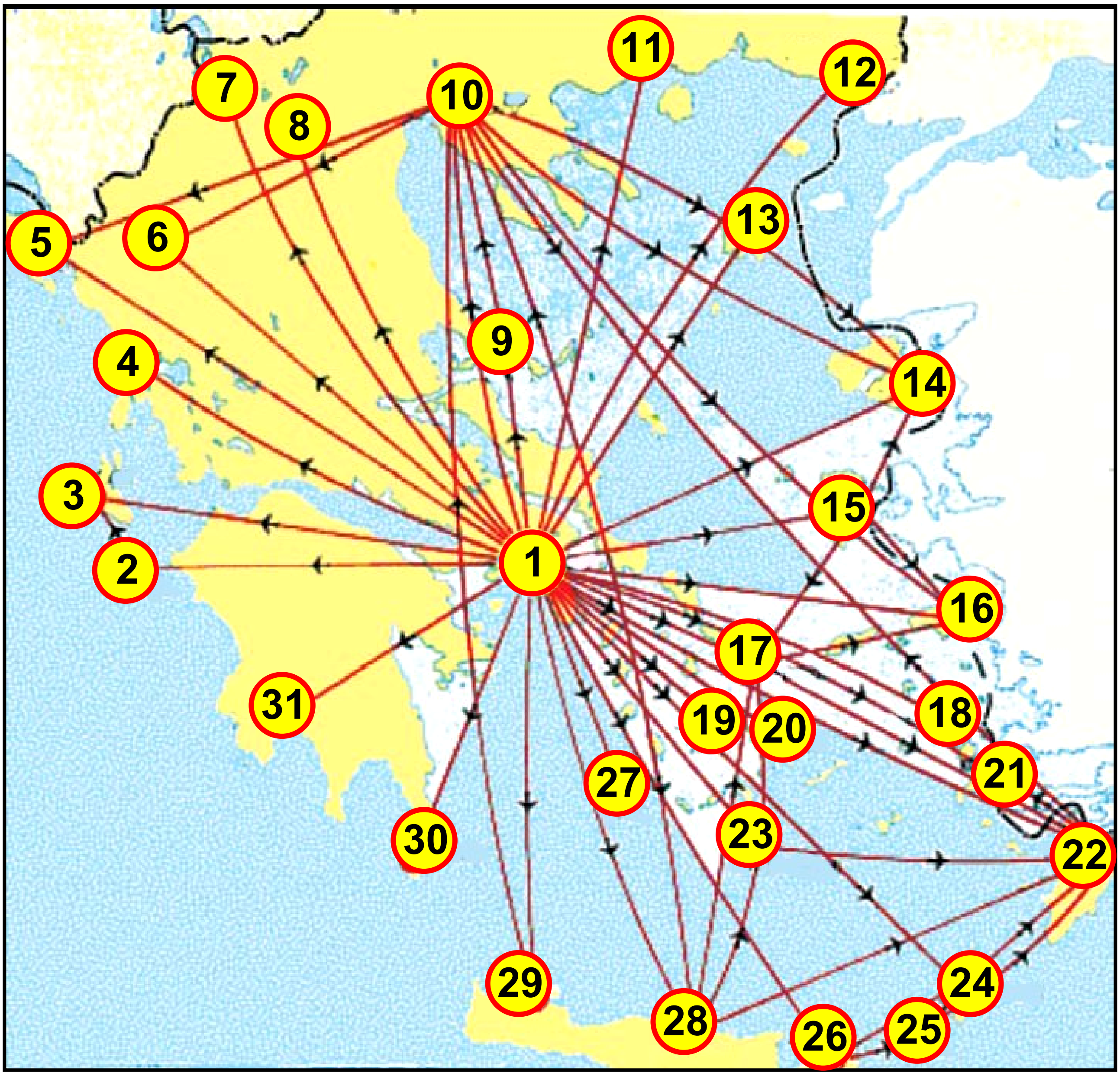
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Σχεδίασε τα σχήματα σε μιλιμετρέ χαρτί:
(α) Το τετράγωνο Α με κλίμακα 9 : 1
(β) Το παραλληλόγραμμο Β με κλίμακα 12 : 1
(γ) Το τρίγωνο Γ με κλίμακα 7 : 1



***2.** Όταν ο Κώστας έκλεισε τα δώδεκα χρόνια είχε το ένα τρίτο της ηλικίας της μητέρας του. Όταν θα γίνει είκοσι χρόνων, ο λόγος των δύο ηλικιών τους θα παραμείνει ο ίδιος;*

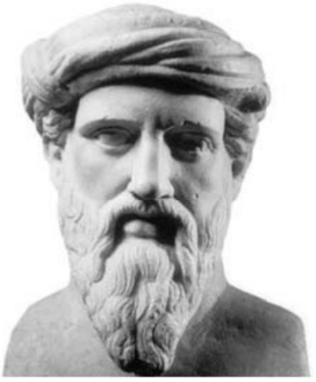
***3.** Να υπολογίσεις μερικές από τις απ' ευθείας αποστάσεις των πόλεων που συνδέονται με αεροπορική γραμμή, έχοντας υπόψη ότι η κλίμακα του παρακάτω χάρτη είναι 1:60.000.000 και να δημιουργήσεις ένα πίνακα χιλιομετρικών αποστάσεων για τις πόλεις αυτές.*



1	ΑΘΗΝΑ	9	ΣΚΙΑΘΟΣ
2	ΖΑΚΥΝΘΟΣ	10	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
3	ΑΡΓΟΣΤΟΛΙ	11	ΚΑΒΑΛΑ
4	ΑΚΤΙΟ	12	ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ
5	ΚΕΡΚΥΡΑ	13	ΛΗΜΝΟΣ
6	ΙΩΑΝΝΙΝΑ	14	ΜΥΤΙΛΗΝΗ
7	ΚΑΣΤΟΡΙΑ	15	ΧΙΟΣ
8	ΚΟΖΑΝΗ	16	ΣΑΜΟΣ
17	ΜΥΚΟΝΟΣ	25	ΚΑΣΟΣ
18	ΛΕΡΟΣ	26	ΣΗΤΕΙΑ
19	ΠΑΡΟΣ	27	ΜΗΛΟΣ
20	ΝΑΞΟΣ	28	ΗΡΑΚΛΕΙΟ
21	ΚΩΣ	29	ΧΑΝΙΑ
22	ΡΟΔΟΣ	30	ΚΥΘΗΡΑ
23	ΣΑΝΤΟΡΙΝΗ	31	ΚΑΛΑΜΑΤΑ
24	ΚΑΡΠΑΘΟΣ		

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώθηκαν και εξελίχτηκαν παράλληλα με την ανθρώπινη σκέψη. Φυσικά μεγέθη, όπως το βάρος, το μήκος, η επιφάνεια και ο όγκος, έδιναν αφορμές για μέτρηση και για σύγκριση, δηλαδή για λόγους και αναλογίες. Η συστηματική, όμως, μελέτη των εννοιών αυτών άρχισε στην αρχαία Ελλάδα τον 6ο π.Χ. αιώνα.



Ο **Πυθαγόρας*****, που έζησε από το 580 π.Χ. μέχρι πιθανόν το 490 π.Χ., ήταν από τους πρώτους Έλληνες που ασχολήθηκε με τους λόγους και τις αναλογίες των φυσικών αριθμών. Υπάρχει μια παράδοση που αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο ο Πυθαγόρας οδηγήθηκε σε αυτήν την έρευνα. Στην Αλεξάνδρεια, όπου έζησε αρκετά χρόνια, βρέθηκε μια μέρα κοντά σε κάποιο σιδηρουργείο όπου τέσσερις τεχνίτες κτυπούσαν με τα σφυριά τους ένα πυρακτωμένο μέταλλο. Ο ήχος από τα κτυπήματα ήταν παράξενα μελωδικός. Αυτό κέντρισε την περιέργεια του Πυθαγόρα, που αναζήτησε το λόγο της απροσδόκητης μελωδίας αυτών των ήχων.***

Ζήτησε από τους τεχνίτες να εξετάσει τα σφυριά τους. Παρατήρησε ότι το βάρος τους δεν ήταν το ίδιο. Συγκρίνοντας το πιο βαρύ με τα υπόλοιπα, βρήκε τους λόγους $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ ***και*** $\frac{1}{2}$ ***αντίστοιχα. Σκέφτηκε ότι οι λόγοι αυτοί, πιθανόν, να είχαν κάποια σχέση με τους ήχους που άκουσε. Πήρε τότε τέσσερις μεταλλικές χορδές και τις τέντωσε έτσι, ώστε τα μήκη τους να έχουν αντίστοιχους λόγους. Δηλαδή, η δεύτερη είχε μήκος ίσο***

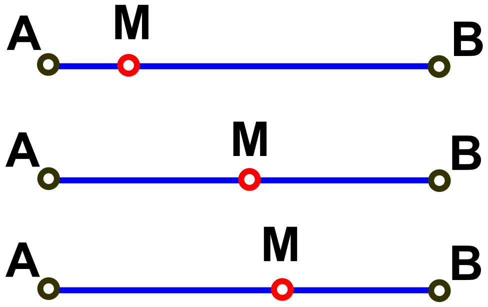
με τα $\frac{3}{4}$ του μήκους της πρώτης. Η τρίτη $\frac{2}{3}$ και η τέταρτη είχε μήκος ίσο με το $\frac{1}{2}$ της πρώτης.

Έκρουσε τις χορδές και διαπίστωσε ότι οι ήχοι είχαν την ίδια μελωδική σχέση με αυτήν που άκουσε στο σιδηρουργείο. Ήταν μια "αρμονία" ήχων (συγχορδία). Με τον τρόπο αυτό, ο Πυθαγόρας ανακάλυψε αρμονικούς τόνους της μουσικής κλίμακας.

Έτσι, οι λόγοι των φυσικών αριθμών ερμήνευαν φαινόμενα που κανείς μέχρι τότε δεν μπόρεσε να συσχετίσει και να εξηγήσει. Ο δρόμος για την αναζήτηση της γνώσης είχε ανοίξει. Η έρευνα και η ερμηνεία των φαινομένων της φύσης είχε ήδη διαμορφώσει στο νου των ανθρώπων ένα νέο κώδικα, μια νέα "παγκόσμια" γλώσσα: τα μαθηματικά.

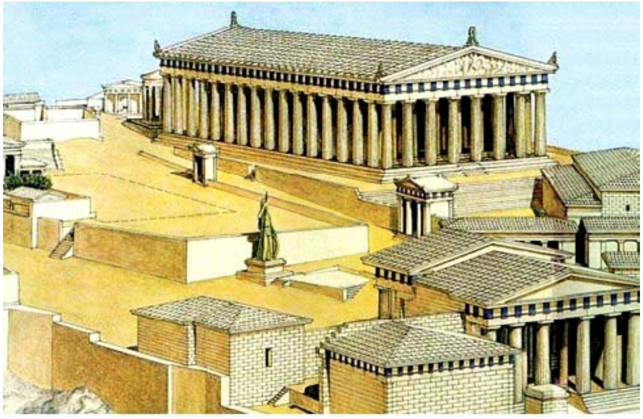
ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο σχήμα βλέπεις τρεις διαφορετικούς τρόπους, με τους οποίους το σημείο **Μ** *χωρίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα* **ΑΒ**, *ορίζοντας τις αντίστοιχες αναλογίες, ανάμεσα στα μέρη του.*



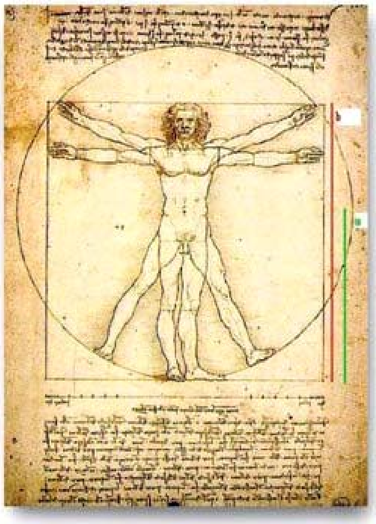
$\frac{ΑΒ}{ΑΜ}$	$\frac{ΑΜ}{ΜΒ}$
5	$\frac{1}{4}$
2	1
1.618	1.618

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν επιλέξει τον τρίτο τρόπο ως καλύτερο αισθητικά και κατασκεύαζαν όλα τα μνημεία τους χρησιμοποιώντας αυτή τη συγκεκριμένη αναλογία στις διαστάσεις τους, όπως π.χ. μεταξύ των δύο διαστάσεων της βάσης του ναού του Παρθενώνα της Ακρόπολης των Αθηνών. Η αναλογία αυτή ονομάστηκε **"χρυσή τομή"*.***



Αλλά και η φύση φαίνεται ότι έχει παρόμοιες προτιμήσεις!

Την αναλογία της "χρυσής τομής" βρίσκουμε ανάμεσα στα μήκη των μελών του ανθρώπινου σώματος, αλλά και στις διαστάσεις των σχημάτων πολλών φυτών και ζώων.



- ***Υπάρχει τέτοια αναλογία στα διάφορα αντικείμενα που παρατηρούμε γύρω μας.***

- ***Προσπάθησε να βρεις την αναλογία της "χρυσής τομής" σε:***

(α) **μνημεία***,* ***(β)*** **ζωγραφικούς πίνακες***,* ***(γ)*** **ανθρώπινες κατασκευές***,* ***(δ)*** **σχήματα ζώων και φυτών***,* ***(ε)*** **ανθρώπινο σώμα** ***και άλλα.***

- ***Συνδέεται η επιλογή της “χρυσής τομής” από τους ανθρώπους στη συγκεκριμένη εποχή με επιστημονικά, αισθητικά, κοινωνικά, θρησκευτικά, οικονομικά, πολιτιστικά κ.λπ. αίτια; Εάν ναι προσπάθησε να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.***

- ***Προσπάθησε να αποτυπώσεις, με τη βοήθεια ίσως και του υπολογιστή, σχέδια των μορφών ή των σχημάτων που έχουν την αναλογία της “χρυσής τομής”.***

Α.6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες ανάλογων ποσών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε μια παρέα κάποιος υποστήριζε ότι το βάρος του ανθρώπου είναι ανάλογο του ύψους του. Μετρήθηκαν, λοιπόν, όλοι και έβαλαν στον παρακάτω πίνακα τα αποτελέσματα.

- ***Μπορείς να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον ισχυρισμό αυτό;***
- ***Πώς δικαιολογείς το συμπέρασμά σου;***

Βάρος σε Kg	**58**	**71**	**56**	**68**
Ύψος σε m	**1,60**	**1,65**	**1,62**	**1,72**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

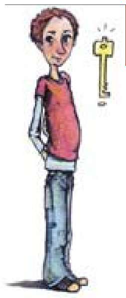
Ο μανάβης πουλάει τα καρπούζια προς 0,4 € το κιλό. Μέσα σε μια ημέρα πούλησε 11 καρπούζια που ζύγιζαν 100 κιλά συνολικά. Ο μανάβης έγραφε, σ' ένα χαρτί, τα λεφτά που εισέπραττε κάθε φορά. Ξέχασε, όμως, μία φορά να το σημειώσει.

- ***Μπορείς να τον βοηθήσεις συμπληρώνοντας τα κενά του παρακάτω πίνακα:***

Τιμή	**6 €**	**2,8 €**	**5,2 €**	**3,2 €**		**3,6 €**
Κιλά						

Τιμή	4,8 €	2,4 €	1,6 €	4,4 €	2 €
Κιλά					

➢ *Δικαιολόγησε τα αποτελέσματα των πράξεων που έκανες και προσπάθησε να διατυπώσεις ένα γενικό κανόνα.*



Μαθαίνουμε

● **Δύο ποσά λέγονται ανάλογα, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.**

● **Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα ίδιο πηλίκο: $\frac{y}{x} = \alpha$.**

Το πηλίκο **α** λέγεται **συντελεστής αναλογίας.**

► Τα ανάλογα ποσά **x** και **y** συνδέονται με τη σχέση: **$y = \alpha \cdot x$** όπου **α** ο συντελεστής αναλογίας.

► Όταν το ποσό **y** είναι **ποσοστό** του ποσού **x**, τα δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση $y = \frac{\alpha}{100} \cdot x$ και είναι **ανάλογα**, με **συντελεστή αναλογίας** το $\frac{\alpha}{100}$ ή α%.

◆ **Η σχέση $y = \alpha \cdot x$ εκφράζει μια αλληλεπίδραση των ποσών x και y. Συγκεκριμένα, ο διπλασιασμός, τριπλασιασμός κ.ο.κ. του ενός ποσού επιφέρει διπλασιασμό, τριπλασιασμό κ.ο.κ. του άλλου ποσού.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας $\alpha = \frac{2}{3}$

Λύση

x	0	1	0,3		
y				$\frac{5}{3}$	3

$\boxed{y = \alpha \cdot x}$

Τα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση: $y = \frac{2}{3} \cdot x$

Άρα για x = 0, η τιμή του y θα είναι: $y = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$

για x = 1 είναι $y = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

για x = 0,3 είναι $y = \frac{2}{3} \cdot 0{,}3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{30} = 0{,}2$

$\boxed{x = \frac{y}{\alpha}}$

Για y = $\frac{5}{3}$ **, θα είναι** $x = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{6} = 2{,}5$

Για y = 3, θα έχουμε, αντίστοιχα:

$x = 3 : \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

2. Σε ένα διάλυμα ζάχαρης η περιεκτικότητα σε ζάχαρη είναι 23%. Πόσα γραμμάρια ζάχαρης υπάρχουν σε 300 gr διαλύματος;

Λύση

Περιεκτικότητα 23% σε ζάχαρη σημαίνει ότι σε *100 gr* διαλύματος υπάρχουν *23 gr* ζάχαρη. Άρα, τα $\frac{23}{100}$ κάθε ποσότητας, από το διάλυμα, είναι ζάχαρη.

Δηλαδή θα ισχύει:

Ποσότητα ζάχαρης = $\frac{23}{100}$ • Ποσότητα διαλύματος

Επομένως: $y = \frac{23}{100} \cdot x$. Η σχέση αυτή κάνει φανερό ότι τα ποσά y και x είναι ανάλογα. Έτσι θα έχουμε:

$$y = \frac{23}{100} \cdot 300 \text{ gr} = 69 \text{ gr}.$$

3. Ένα πλοίο έχει σταθερή ταχύτητα και καλύπτει απόσταση 80 Km σε 2 ώρες. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει απόσταση 2.000 Km;

Λύση

Χρόνος (ώρες)	*2*	*x*
Απόσταση (Km)	*80*	*2.000*

Επομένως, έχουμε: $\frac{2}{80} = \frac{x}{2.000}$

Άρα: $80 \cdot x = 2 \cdot 2.000$

Επομένως: $80 \cdot x = 4.000$ Οπότε $x = \frac{4000}{80} = 50$ ώρες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα: Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος.

☐ ***(α) Ο αριθμός αναψυκτικών και τα χρήματα που κοστίζουν***

☐ ***(β) Το εμβαδόν του πατώματος και ο αριθμός των πλακών που είναι στρωμένο***

☐ ***(γ) Ο αριθμός των εργατών και ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρώσουν ένα έργο.***

☐ ***(δ) Το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου δεδομένου εμβαδού***

☐ ***(ε) Η ταχύτητα και ο χρόνος που απαιτείται για την κάλυψη μιας απόστασης.***

☐ ***(στ) Η πλευρά ενός τετραγώνου και το εμβαδόν του.***

☐ ***(ζ) Η ηλικία ενός ανθρώπου και η περιουσία του.***

☐ ***(η) Το ποσό που ξοδεύει κάποιος για να αγοράσει λαχεία και το ποσό που κερδίζει.***

2. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύο μεγέθη των οποίων οι αντίστοιχες τιμές δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο λέγονται ……………….

(β) Αν τετραπλασιάσουμε την τιμή ενός από δύο ανάλογα ποσά και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού …………………………………..

(γ) Τα ανάλογα ποσά συνδέονται με τη σχέση …………..

3. ***Εξέτασε αν τα ποσά που δίνονται στους παρακάτω πίνακες είναι ανάλογα:***

(α)

x	3	5	7
y	8	10	12

(β)

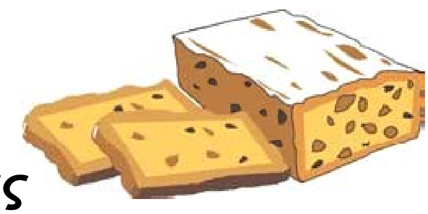
x	3	4	6	11
y	0,9	1,2	1,8	3,3

4. ***Στον πίνακα που ακολουθεί, τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Υπολόγισε το συντελεστή αναλογίας τους και συμπλήρωσε τον πίνακα.***

x	5	0	1	
y	10,05			2

x		3,7	0,61	
y	0,125			0,55

5. ***Μια συνταγή για κέικ αναφέρει: «4 αυγά, 1 πακέτο φαρίνα, του μισού κιλού, 250 gr βουτύρου, 2 φλιτζάνια ζάχαρη, 1 βανίλια, 1 φλιτζάνι γάλα». Βρες πώς θα γίνει η συνταγή αν θέλεις να φτιάξεις μεγαλύτερη δόση και έχεις 7 αυγά;***



6. ***Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{3} = \frac{2}{6}$. Υπολόγισε το x και το λόγο $\frac{x+2}{3+6}$. Τι παρατηρείς;***

7. ***Κεφάλαιο 150.000 € κατατέθηκε στην τράπεζα με επιτόκιο 9,5%. Πόσο θα έχει γίνει το κεφάλαιο, μετά από 1 χρόνο;***

Α.6.4. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η σχέση, μεταξύ δύο ανάλογων ποσών x και y με συντελεστή αναλογίας α = 3, δίνεται από τον τύπο: y = 3 • x

Ο πίνακας αναλογίας των ποσών x και y είναι:

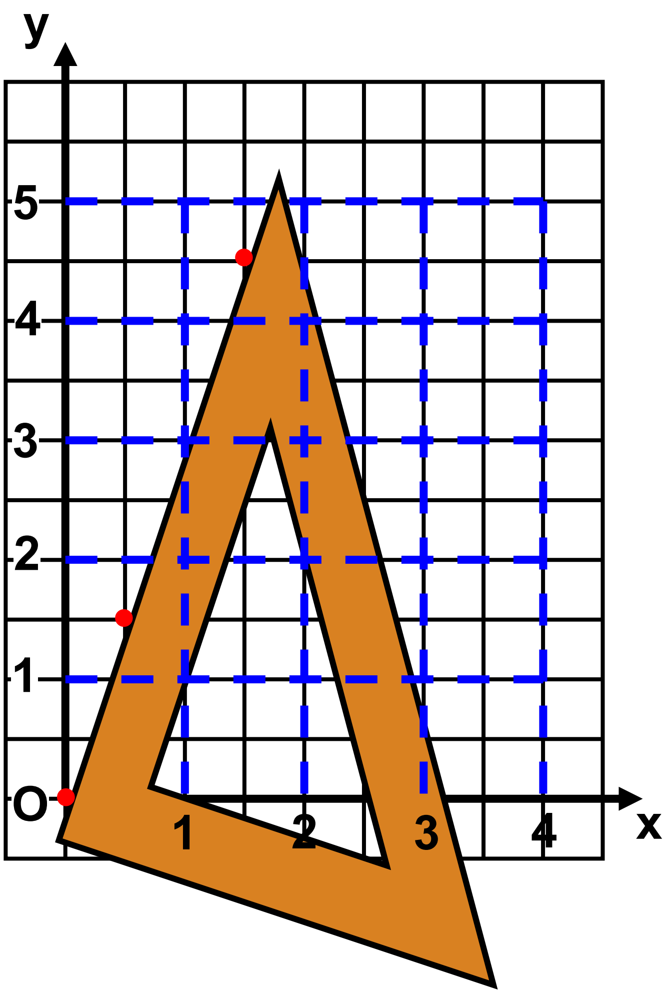
x	***0***	***0,5***	***1,5***							
y	***0***	***1,5***	***4,5***							

- ***Συμπλήρωσε τα κενά του παρακάτω πίνακα και με άλλες τιμές των ανάλογων ποσών x και y.***

- ***Βρες τα σημεία του επιπέδου που αναπαριστούν τα παραπάνω ζεύγη τιμών.***

- ***Προσπάθησε να διαπιστώσεις,εάν τα σημεία ανήκουν σε μία ημιευθεία ή όχι.***

- ***Η ημιευθεία αυτή περνάει από το σημείο Ο (0,0) δηλαδή την αρχή των ημιαξόνων;***



Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

Από τα παραπάνω ζεύγη μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι:

► Τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη τιμών (x, y) δύο ανάλογων ποσών βρίσκονται πάνω σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή Ο (0,0) των ημιαξόνων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες Α, Β, Γ και Δ. (α) Να γίνει η γραφική απεικόνιση των ζευγών (x, y) των πινάκων στο επίπεδο και (β) να διαπιστωθεί σε ποια περίπτωση αυτά παριστάνουν ποσά ανάλογα.

Α

x	0	1	2	3
y	0	2	1	1,5

Β

x	0	1	2	3
y	1	1,5	2	2,5

Γ

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

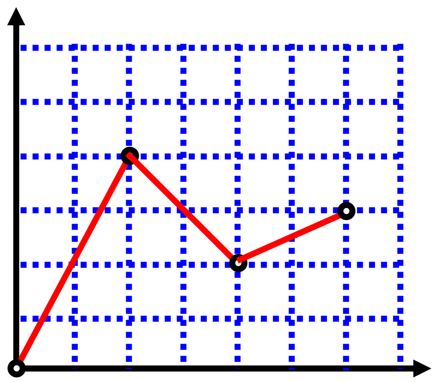
Δ

x	0	1	2	3
y	0	0,5	1	1,5

Λύση

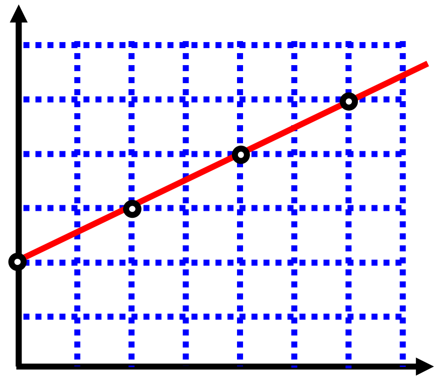
Ο πίνακας Α είναι πίνακας τιμών των x και y που δεν είναι ανάλογα,

αφού $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{1{,}5}$

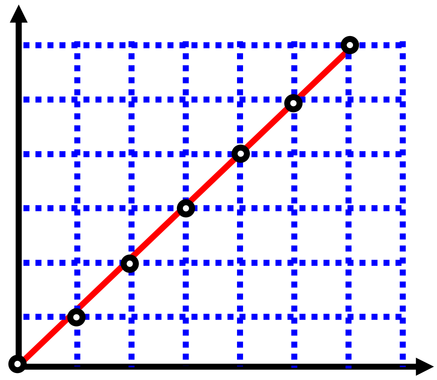


Ο πίνακας **Β** είναι πίνακας τιμών των **x** και **y** που δεν είναι ανάλογα,

αφού $\frac{1}{1,5} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{3}{2,5}$

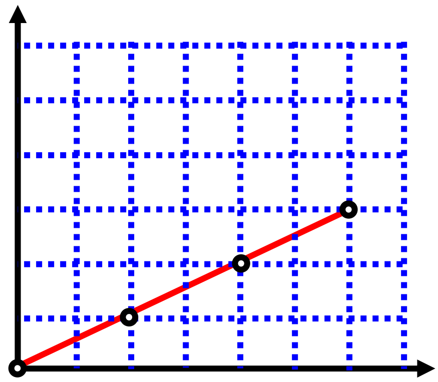


Ο πίνακας **Γ** είναι πίνακας αναλογίας των ποσών **x** και **y**, με συντελεστή αναλογίας το $\alpha = 1$



◆ Η ημιευθεία που την αναπαριστά έχει αρχή την αρχή των αξόνων και είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ των ημιαξόνων

Ο πίνακας **Δ** είναι πίνακας αναλογίας των ποσών **x** και **y** με συντελεστή αναλογίας το $\alpha = 0,5$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας α = 1,5.

(α) Δημιούργησε έναν πίνακα τιμών των δύο ποσών, ο οποίος να περιέχει τουλάχιστον δύο ζεύγη τιμών.

(β) Βρες τα σημεία που αναπαριστούν τα ζεύγη τιμών του πίνακά σου.

(γ) Σχεδίασε τη γραφική αναπαράσταση της σχέσης αναλογίας των ποσών χ και y, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων.

2. Σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα ημιαξόνων να σχεδιάσεις τις γραφικές παραστάσεις για κάθε μία από τις ακόλουθες σχέσεις αναλογίας:

(α) $y = \frac{1}{2} \cdot x$, ***(β)*** $y = 3 \cdot x$, ***(γ)*** $y = 5{,}5 \cdot x$,

(δ) $y = 10 \cdot x$, ***(ε)*** $y = 0{,}01 \cdot x$.

3. Αντιστοίχισε κάθε πίνακα με ένα από τους προτεινόμενους τύπους:

(Α)	x	4	7	12
	y	10	17,5	30

(Β)	x	5	7,5	9
	y	11	16	19

(Γ)	x	2	3	10
	y	7	9	23

(Δ)	x	2	4	6
	y	6	3	2

(Ε)	x	2	5	0,5
	y	1	2,5	0,25

(Ζ)	x	0,2	6	10
	y	2,4	14	22

(Η)	x	1	1,2	2,5
	y	3	3,6	7,5

(Θ)	x	0,8	1	1,5
	y	2,2	3	5

(1)	$y = 2x + 3$
(2)	$y = 3x$
(3)	$y = 12 : x$
(4)	$y = 2,5x$
(5)	$y = 2x + 2$
(6)	$y = 2x + 1$
(7)	$y = 4x – 1$
(8)	$y = 0,5x$

***4.** Ένας καταστηματάρχης αθλητικών ειδών διαθέτει 12.000 € για να αγοράσει φόρμες γυμναστικής, μαγιό και αθλητικά παπούτσια. Κάθε φόρμα κοστίζει 40 €, κάθε μαγιό 20 € και κάθε ζευγάρι παπούτσια 50 €.*
(α) Να βρεις τις σχέσεις αναλογίας "χρήματα - κομμάτια από κάθε είδος" και να τις παραστήσεις γραφικά στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.
(β) Ο καταστηματάρχης αποφάσισε να διαθέσει το ίδιο ποσό, για κάθε είδος. Βρες πόσα κομμάτια από κάθε είδος θα αγοράσει με τα χρήματα που διαθέτει, χρησιμοποιώντας μόνο τη γραφική παράσταση των σχέσεων που δημιούργησες στο πρώτο ερώτημα της άσκησης.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ


1
x